
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI CAPRIOLI

Sulle soluzioni periodiche di una equazione fortemente non-lineare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
9 (1954), n.3, p. 271–280.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_271_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sulle soluzioni periodiche di una equazione fortemente non-lineare.

Nota di LUIGI CAPRIOLI (a Bologna)

Sunto. - Si determinano condizioni necessarie per la esistenza di soluzioni periodiche di un'equazione fortemente non-lineare del tipo $\ddot{z} + \frac{\omega}{\varepsilon} f(\dot{z}) + \omega^2 z = 0$ quando la $f(\dot{z})$ sia un polinomio di quinto grado a radici reali e simmetriche. In particolare, si studia la soluzione (stabile) che può ottenersi con la "eccitazione dura",.

Numerosi fenomeni, assai comuni nella tecnica (oscillazioni non lineari ⁽¹⁾), suggeriscono, come è ben noto, l'esistenza di soluzioni periodiche dell'equazione

$$(1) \quad \ddot{z} + \frac{\omega}{\varepsilon} f(\dot{z}) + \omega^2 z = 0$$

(dove ω , ε sono costanti positive (cfr. nota (12)) ed $f(\dot{z})$ una funzione derivabile ⁽²⁾); o dell'altra, ormai classica (di LIÉNARD):

$$(2) \quad \ddot{x} + \frac{\omega}{\varepsilon} \varphi(x) \dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

che, posto

$$(3) \quad \dot{z} = x,$$

$$(4) \quad \frac{d}{d\dot{z}} f(\dot{z}) \equiv \frac{d}{dx} f(x) = \varphi(x),$$

si deduce dalla (1) per semplice derivazione ⁽³⁾.

Ora, mentre di tale esistenza (e sotto certe ipotesi per la funzione $f(\dot{z})$ o per la $\varphi(x)$, anche della unicità ⁽⁴⁾) sono state date da tempo diverse dimostrazioni rigorose, valide sotto condizioni più

⁽¹⁾ I primi studi in proposito sono quelli di VAN DER POL sull'oscillatore elettronico a triodo: *A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations*, « Radio Review », I, 1920.

⁽²⁾ Della funzione $f(\dot{z})$, che ovviamente supponiamo non-lineare, saranno precisati più innanzi i caratteri.

⁽³⁾ È manifesto (cfr. (3)) che ad ogni soluzione periodica della (1) corrisponde una soluzione periodica della (2), e viceversa.

⁽⁴⁾ Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Zanichelli, Bologna, 1949: vol. II, cap. XII.

o meno restrittive per le $f(z)$, $\varphi(x)$ ⁽⁵⁾, assai meno agevole risulta la ricerca effettiva di quelle soluzioni periodiche e lo studio delle loro proprietà. Se, infatti, tale problema può ritenersi risolto, almeno in via approssimata, nel caso in cui il parametro ε è sufficientemente grande (debole non-linearità) ⁽⁶⁾, assai più limitati sono i risultati fino ad ora conseguiti nel caso di forte non-linearità ⁽⁷⁾. Fra le più recenti ricerche in questo campo, sono da citare quella di J. HAAG ⁽⁸⁾ sul comportamento asintotico della ampiezza e del periodo delle oscillazioni di rilassamento, e quelle di D. A. FLANDERS ed J. J. STOKER ⁽⁹⁾ nel caso particolare della equazione di VAN DER POL ⁽¹⁰⁾.

Generalizzando un procedimento illustrato in quest'ultimo lavoro, si studiano, qui di seguito, le soluzioni periodiche della (1) con forte non-linearità e nel caso (di notevole interesse in molte questioni concrete) delle cosiddette oscillazioni ad eccitazione "dura", ⁽¹¹⁾, che possono sussistere quando la funzione $f(x)$ sia una quintica del tipo

$$(5) \quad f(x) = x^5 - kx^3 + x \quad (12)$$

⁽⁵⁾ G. SANSONE, Op. cit.. J. HAAG, *Etude asymptotique des oscillations de relaxation*, « Ann. de l'Ec. Sup. » 1943. J. J. STOKER, *Nonlinear vibrations*, « Interscience Publishers », New York, 1950.

⁽⁶⁾ Cfr. N. MINORSKY, *Introduction to non-linear mechanics*, « E. Brothers, 1947, Michig. N. KRYLOFF and N. BOGOLIUBOFF, *Introduction to non-linear mechanics*, « Princeton Univ. Press », 1943.

⁽⁷⁾ VAN DER POL per primo ha provato che le soluzioni periodiche di una equazione del tipo (2) hanno andamento in prima approssimazione sinusoidale, per valori sufficientemente grandi di ε ; e che tale andamento va sempre più scostandosi da quello sinusoidale al diminuire di ε , fino ad assumere quel particolare carattere di successione periodica di fatti singolarmente aperiodici che VAN DER POL definì oscillazioni di "rilassamento",.

⁽⁸⁾ Cfr. anche: *Les mouvements vibratoires*, « Presses Univ. de France », 1952.

⁽⁹⁾ *The limit case of relaxation oscillations*, Studies in non linear vibrations theory, « Inst. of. Math. and Mech. », New York Un., 1946.

⁽¹⁰⁾ Altro importante lavoro sulle oscillazioni di rilassamento è quello di T. VOGEL, *Sur certaines oscillations à déferlement* « Actes du Coll. Int. des vibrations non-lineaires » Pubbl. Sc. Tech. Min. Air 281, 1951.

⁽¹¹⁾ Cfr. N. MINORSKY, Op. cit. p. 175.

⁽¹²⁾ Potrà ammettersi, per fissare le idee, che la variabile x abbia le dimensioni di una lunghezza, che la variabile indipendente sia il tempo e che la quantità ω sia omogenea con l'inverso di un tempo. Se si suppone la $\varphi(x)$ di dimensioni nulle (per il che basterà ammettere che i termini $x^5, -kx^3$ della (5) siano affetti da coefficienti unitari di dimen-

che ammette cinque zeri: $x = 0$, $x = \pm a$, $x = \pm b$ ($0 < a < b$). reali, distinti e simmetrici; il che si verifica, ovviamente, quando è $k < 2$ ⁽¹³⁾.

Si dimostra poi, in particolare, che per valori sufficientemente piccoli di ε , la (1) ammette una (ed una sola) soluzione periodica stabile, soltanto se è verificata la condizione $5 < k^2$, qualitativamente analoga a quella ((11)) necessaria per la esistenza di soluzioni periodiche della (1) nel caso di piccola non-linearità (cfr. nota (25)).

Si determina, infine, una formola che permette il calcolo del valore asintotico del periodo di tale soluzione per ogni assegnato valore del parametro ε .

1. Posto

$$(6) \quad y = -\omega \varepsilon z,$$

seguono dalla (1) le equazioni

$$(7) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\varepsilon} [y - f(x)], \quad \frac{dy}{dt} = -\omega \varepsilon x;$$

ed anche, eliminando il tempo, l'unica equazione

$$(8) \quad [y - f(x)]dy = -\varepsilon^2 \omega dx;$$

ed è evidente che ad ogni soluzione periodica della (1) corrisponde una soluzione periodica delle (7), e viceversa. La ricerca dei cicli limiti della (1) può dunque ricondursi alla analoga per le (7) o la (8). A tale proposito, cominciamo con l'osservare che per $\varepsilon \rightarrow 0$

sioni L^{-4} , L^{-2} , rispettivamente) anche il parametro ε risulta adimensionale. Alla equazione (2) può pensarsi associato il moto di un punto di massa m soggetto alla forza elastica $-m\omega^2 x$ ed alla forza "resistente", di tipo viscoso $-m \frac{\omega}{\varepsilon} \varphi(x) \dot{x}$.

⁽¹³⁾ Si ha infatti

$$(a) \quad a^2 = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}, \quad k^2 = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

ed è inoltre facile provare che, come del resto è ben noto, un qualunque polinomio del tipo $P(y) = cy(y^2 - a^2)(y^2 - b^2)$, cioè dotato di cinque zeri reali, distinti, simmetrici può sempre porsi nella forma (5); basta infatti assumere $y = (ab)^{1/2}x$, $k = (a^2 + b^2)/ab$ perchè sia $cy(y^2 - a^2)(y^2 - b^2) = c(ab)^{5/2}(x^5 - kx^3 + x)$ e, posto ancora: $\Phi(x) = c^{-1}(ab)^{-5/2}P(y)$, risulti $\Phi(x) = x^5 - kx^3 + x$.

Le considerazioni esposte in questo lavoro sussistono quindi non solo se la $f(x)$ è del tipo (5), ma anche per una quintica qualunque, semisimmetrica e con radici reali.

la (8) tende all'equazione $[y - f(x)]dy = 0$ e che le curve integrali di quest'ultima debbono essere costituite da archi della curva \mathcal{C} , la cui equazione $y - f(x) = 0$ si scrive, nell'ipotesi (5),

$$(9) \quad y = x^5 - kx^3 + x,$$

e da segmenti di rette parallele all'asse x . Le traiettorie integrali del sistema (7) dovranno dunque scostarsi da tali archi e da tali segmenti di quantità che, con opportuna scelta di ε (sufficientemente piccolo) possono essere rese arbitrariamente piccole. Per maggiore brevità di espressioni, noi considereremo, in luogo delle effettive traiettorie integrali delle (7), quegli archi di \mathcal{C} e quei segmenti paralleli all'asse x nei cui intorno tali traiettorie verranno a trovarsi per ε sufficientemente piccolo (cfr. note (16) e (17)). Osserviamo inoltre (cfr. la prima delle (7)) che la curva \mathcal{C} , nei cui punti è ovviamente $\frac{dx}{dt} = 0$, determina nel piano xy ⁽¹⁴⁾ due zone: quella (I) contenente il semiasse positivo delle y , in cui è $y - f(x) > 0$, quindi $\frac{dx}{dt} > 0$; e quella (II) contenente il semiasse negativo delle y in cui è $\frac{dx}{dt} < 0$. Dalla seconda delle (7) segue poi che nel semipiano $x < 0$ è $\frac{dy}{dt} > 0$ ed è invece $\frac{dy}{dt} < 0$ per $x > 0$.

Ciò premesso, supponiamo in prima ipotesi che, detti α, β gli estremanti positivi ($0 < \alpha < \beta$) della $f(x)$ ⁽¹⁵⁾, sia

$$(10) \quad |f(\alpha)| < |f(\beta)|,$$

cioè che la curva \mathcal{C} abbia l'andamento di fig. 1. È facile mostrare che le spezzate chiuse mistilinee $S_1S_2S_3S_4S_1, I_1I_2I_3I_4I_1$, che indicheremo rispettivamente con \mathcal{S}, \mathcal{I} (cfr. fig. 1) sono traiettorie limite (per $\varepsilon \rightarrow 0$) di cicli limiti stabili ed instabili rispettivamente. A tale scopo proveremo:

a) che se il punto P , immagine nel piano xy del moto retto dalle (7) (cfr. nota (14)) è inizialmente in un qualunque punto,

⁽¹⁴⁾ Tale piano può considerarsi come il piano delle fasi associato al moto di un punto le cui ascissa e velocità sono rispettivamente y e $\frac{dy}{dt}$.

⁽¹⁵⁾ Le quantità α, β sono le radici positive (e reali)

$$(b) \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{10}(3k - \sqrt{9k^2 - 20})}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{10}(3k + \sqrt{9k^2 - 20})}$$

della equazione

$$(c) \quad f'(x) \equiv \varphi(x) \equiv 5x^4 - 3kx^2 + 1 = 0.$$

punto P si muove quindi lungo il segmento P_0P_1 parallelo all'asse x , e nel verso delle x crescenti ⁽¹⁶⁾, fino al punto P_1 in cui si annulla la $\frac{dx}{dt}$; a partire da P_1 , il punto P segue l'arco P_1S_2 di \mathcal{C} ⁽¹⁷⁾, poi il segmento S_2S_3 ⁽¹⁸⁾ parallelo all'asse x e nel verso delle x decrescenti; e, infine, l'arco S_3S_4 di \mathcal{C} ed il segmento S_4S_1 . Dopodichè il punto P continuerà a muoversi lungo la traiettoria \mathcal{S} tendendo a ritornarvi quando se ne fosse comunque allontanato, rimanendo però sempre al difuori del dominio \mathfrak{D} .

Considerazioni del tutto analoghe a quelle or ora esposte portano a concludere che le traiettorie integrali partenti da punti interni a \mathfrak{D} convergono tutte alla origine 0: infatti, a partire da un punto come Q_0 , il punto P descriverà il segmento Q_0Q_1 (in quanto, in tale zona del piano, è $\frac{dy}{dt} \cong 0$, $\frac{dx}{dt} \cong \infty$); a partire da Q_1 (in cui è $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} < 0$), il punto P scende lungo la curva \mathcal{C} , nel verso indicato in figura (non può percorrere \mathcal{C} nel verso contrario, perchè ciò richiederebbe che fosse $\frac{dy}{dt} > 0$) e raggiunge l'origine (la traiettoria integrale non può seguire \mathcal{C} oltre l'origine in quanto

⁽¹⁶⁾ In effetti, la velocità del punto P ha la componente $\frac{dy}{dt}$ non nulla e di segno negativo nel semipiano $x > 0$, positiva nel semipiano $x < 0$, come si è detto nel testo. Poichè la componente $\frac{dx}{dt}$ è positiva in tutta la zona I, l'effettivo andamento della traiettoria di P sarebbe del tipo P_0P_1' ; la traiettoria attraverserebbe la curva \mathcal{C} nel punto P_1' prossimo a P_1 , essendo diretta parallelamente all'asse y e nel verso negativo di questo.

⁽¹⁷⁾ Anche qui, l'andamento reale della traiettoria, per piccoli valori di ϵ diversi da zero è del tipo di quello indicato a tratti in figura; nel punto P_1 , infatti, la componente $\frac{dy}{dt}$ della velocità è piccola (dell'ordine di ϵ) ma diversa da zero e di segno negativo. Il punto P attraversa quindi la \mathcal{C} in P_1' venendo a trovarsi nella zona II del piano xy , ove è $\frac{dx}{dt} < 0$ (e, in valore assoluto, tanto più grande quanto maggiore è la distanza dalla \mathcal{C}); si comprende così la tendenza di P a mantenersi "prossimo.", alla \mathcal{C} : il che giustifica, tenuto presente quanto è stato detto a suo tempo circa la sostituzione della curva limite a quella effettiva, l'asserzione fatta nel testo.

⁽¹⁸⁾ In un punto come S_2' pel quale passa la traiettoria effettiva del sistema (7) è $\frac{dy}{dt} \cong 0$ mentre $\frac{dx}{dt}$ è molto grande in valore assoluto e di segno negativo.

nel semipiano $x < 0$, è $\frac{dy}{dt} > 0$). Da quanto precede risulta che la curva \mathcal{S} è limite di cicli limiti stabili ⁽¹⁹⁾; e che anche la origine (che è l'unico punto singolare del sistema (7)) è stabile ⁽²⁰⁾. Il ben noto teorema di POINCARÉ assicura l'esistenza di un ciclo (almeno) compreso fra l'origine ed il ciclo stabile; e questo (che è unico, in quanto fra il punto O e la curva \mathcal{S} non esistono altri cicli stabili) non può essere che la curva \mathcal{J} , descritta nel verso indicato in fig. 1: infatti, a partire da un punto, come R_0 , di essa, il punto-immagine P descriverà il segmento R_0I_1 , nel verso delle x crescenti; poi la curva \mathcal{C} ⁽²¹⁾; se il distacco da questa si verifica in un punto diverso da I_2 , il punto P raggiunge, o l'origine, o la curva \mathcal{S} (cfr. le traiettorie $I_2''I_2'''O$, $I_2''S_3'$...). Se il punto si stacca dalla \mathcal{C} in I_2 , esso percorre il segmento I_2I_3 , poi ancora un arco della \mathcal{C} ; quindi, se il nuovo distacco avviene in I_4 , descrive il segmento I_4I_1 , e così via: appare così manifesto che il punto immagine può seguire la traiettoria \mathcal{J} , ma un tale andamento è evidentemente instabile ⁽²²⁾.

Risulta quindi che in qualunque sistema fisico che sia retto da equazioni del tipo (1) o (2), può stabilirsi, nella ipotesi (10), un regime oscillatorio stazionario (curva integrale \mathcal{S}) purchè lo stato

⁽¹⁹⁾ Ciò può provarsi anche in modo rigoroso: Si può costruire, infatti, nel piano xy , un dominio anulare, comprendente nel suo interno la spezzata \mathcal{S} ed escludente l'origine (che, come è detto nel testo è l'unico punto singolare), i cui contorni possono essere resi, per ε sufficientemente piccolo, tanto prossimi quanto si vuole alla stessa curva \mathcal{S} e tale che il vettore di componenti $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ sia diretto, in ogni punto di tali contorni, verso l'interno del dominio stesso. E ciò basta (teorema di POINCARÉ-BENDIXON) per poter asserire che la curva \mathcal{S} è traiettoria limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ dei cicli limiti stabili del sistema (7) (cfr. J. J. STOKER, Op. cit.).

⁽²⁰⁾ Del che ci si può rendere conto anche osservando che nella origine la forza $-m \frac{\omega}{\varepsilon} \varphi(x)x$ è effettivamente resistente (è infatti $\varphi(0) = 1$).

⁽²¹⁾ È evidente che se il punto P si allontana dal segmento R_0R_1 esso può raggiungere o l'origine o la curva \mathcal{S} , a seconda che la deviazione del segmento R_0R_1 si è verificata verso l'interno o verso l'esterno della curva \mathcal{J} .

⁽²²⁾ Anche la curva \mathcal{J} può racchiudersi in un dominio anulare del piano xy , non comprendente l'origine, i cui contorni possono approssimarsi, per $\varepsilon \rightarrow 0$, tanto quanto si vuole alla curva \mathcal{J} stessa e tale che il vettore di componenti $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ sia diretto, in ogni punto del contorno, verso l'esterno del dominio.

iniziale del sistema sia tale che il suo punto-immagine P sia esterno al dominio \mathfrak{D} ⁽²³⁾. Si può, infine, verificare, con criteri analoghi a quelli finora esposti, la instabilità parziale delle traiettorie chiuse (in parte sovrapposte: cfr. fig. 2a) nel caso che sia $|f'(\alpha)| = |f'(\beta)|$ (ciclo metastabile); e la non esistenza di traiettorie chiuse nel caso di $|f'(\alpha)| < |f'(\beta)|$ (fig. 2b).

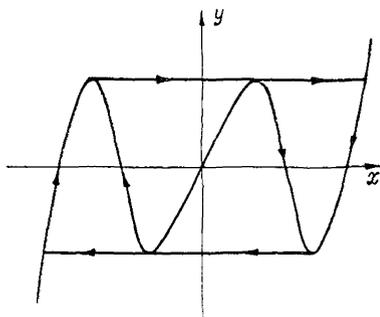


Fig. 2a

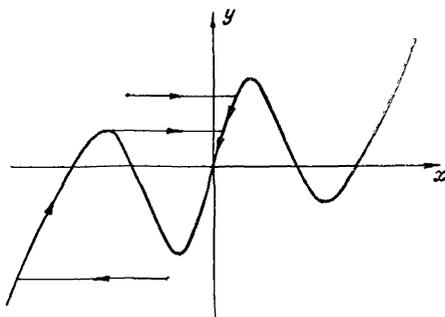


Fig. 2b

2. Un semplice calcolo mostra che la condizione (10) è verificata, se, nella (9), è

$$(11) \quad 5 < k^2 \text{ }^{(24)};$$

si ritrova così, nel caso qui in esame, un fatto analogo (qualitativamente) a quello che si verifica quando il parametro ε assume valori molto grandi (debole non-linearità). In questa ultima ipotesi ed a parità delle altre condizioni, risulta, come è ben noto, che la (2) ammette due soluzioni periodiche (di cui una stabile), soltanto

⁽²³⁾ Il che equivale a dire che assegnato, ad es., alla « velocità » z il valore iniziale x_0 , l'innescò delle oscillazioni si verifica soltanto (eccitazione « dura »,) se l'« ascissa » iniziale y_0 soddisfa una delle due condizioni (cfr. rel. (6) e fig. 1):

$$y_0 < y_{20}, \quad y_0 > y_{10},$$

cioè se il suo modulo supera un certo minimo. Od anche se, fissata invece l'« ascissa » iniziale, la « velocità » iniziale ha modulo sufficientemente grande.

⁽²⁴⁾ La (10) equivale alla

$$f^2(\alpha) < f^2(\beta)$$

che può scriversi, dopo semplici calcoli, nella forma

$$\alpha^2(2 - k\alpha^2)^2 - \beta^2(2 - k\beta^2)^2 < 0$$

dalla quale, tenuto conto delle (b) segue la disequazione del testo.

se il parametro k verifica la condizione $\frac{40}{9} < k^2$ ⁽²⁵⁾ (evidentemente meno restrittiva della (11)).

3. Assai facile risulta, infine, il calcolo dei valori delle ampiezze e dei periodi delle soluzioni studiate nei nn. precc.: si osservi, in particolare, che l'ampiezza $\gamma(k)$ della soluzione stabile coincide con il modulo dell'ascissa del punto S_1 (o di quella, uguale, di S_3). E questa è (l'unica) radice reale dell'equazione

$$x^3 - 2\beta x^2 + (3\beta^2 - k)x - 4\beta^3 - 2k\beta = 0 \quad (26),$$

nella quale è (cfr. rel. (b)):

$$\beta(k) = \sqrt{\frac{1}{10} (3k + \sqrt{9k^2 - 20})}.$$

Mentre non risulta formalmente semplice la esplicita espressione di $\gamma(k)$ in funzione di k , ne è assai facile il calcolo numerico, una volta assegnato il valore di k ⁽²⁷⁾.

⁽²⁵⁾ Cfr. N. MINORSKY, Op. cit., pag. 175. A questo risultato può del resto rapidamente pervenirsi anche osservando che, per ε sufficientemente grande, le soluzioni periodiche delle (2) differiscono dalla

$$(d) \quad x = A \sin \omega t$$

per quantità dell'ordine di $1/\varepsilon$. Ora l'ampiezza A di tali soluzioni deve verificare la relazione

$$(e) \quad \int_0^{2\pi/\omega} \varphi(x) \cdot \dot{x}^2 dt = 0$$

che si ottiene (teor. delle forze vive) moltiplicando (2) per \dot{x} ed integrando a tutto il periodo $2\pi/\omega$. Dalla (e) segue subito, tenuto conto delle (c), (d), l'equazione.

$$(f) \quad 5A^4 - 6KA^2 + 8 = 0$$

e la disequazione del testo esprime appunto la condizione affinché la (f) ammetta radici reali.

⁽²⁶⁾ Basta osservare che il punto S_1 è la ulteriore (ed unica) intersezione reale della \mathcal{C} con la retta $y = f(-\beta)$ tangente alla \mathcal{C} stessa nel punto $[-\beta, f(-\beta)] \equiv S_4$; l'ascissa di S_1 è pertanto radice dell'equazione:

$$\frac{f(-\beta) - f(x)}{(x + \beta)^2} = 0$$

che è appunto quella del testo.

⁽²⁷⁾ Per $k = 5/2$ si trova, con errore relativo all'ordine dell' 10^0 , $\gamma \approx 2, 12$.

Per il periodo T della soluzione stabile si ha evidentemente, tenuto conto della simmetria del ciclo e del fatto che i tempi relativi ai tratti rettilinei di esso sono trascurabili rispetto a quelli (uguali) relativi ai tratti curvilinei S_1S_2 , S_3S_4 (cfr. le (7)):

$$T = \frac{2}{\varepsilon\omega} \left| \int_{\beta(k)}^{\gamma(k)} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \right| = \frac{2}{\varepsilon\omega} \left| \frac{5}{4} (\gamma^4 - \beta^4) - \frac{3}{2} (\gamma^2 - \beta^2) + \log \frac{\gamma}{\beta} \right|.$$

Anche il periodo T è facilmente calcolabile quando sia assegnato il valore del parametro k e siano state determinate le quantità $\beta(k)$, $\gamma(k)$ (²⁸).

Di qualche interesse potrebbe essere anche la valutazione, in funzione di ε , degli scarti dei valori effettivi dell'ampiezza e del periodo dell'oscillazione di rilassamento relativa ad un assegnato valore di ε (diverso da zero) dai valori limiti γ , T precedentemente calcolati; ma una tale valutazione non sembra facilmente effettuabile con procedimenti del tipo di quelli fin qui esposti (²⁹).

È ovvio, infine, che le considerazioni oggetto di questa nota sussistono anche sotto condizioni assai meno restrittive di quelle qui ammesse per la $f(x)$; e, in particolare, per una qualunque funzione continua, semisimmetrica, tendente a $+\infty$ per $x \rightarrow \infty$ e che ammetta per $x > 0$ un solo massimo positivo ed un solo minimo negativo.