Bollettino
Unione Matematica Italiana

Carlo Felice Manara

Invarianti proiettivi differenziali nello spazio e curve W.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.3, p. 237–240.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_237_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Invarianti proiettivi differenziali nello spazio e curve *W*.

Nota di CARLO FELICE MANARA (a Modena)

Sunto. - *Si caratterizzano le curve* W *dello spazio, ed in particolare le cubiche gobbe; allo scopo si assumono certi invarianti proiettivi-differenziali legati a terne di punti delle curve stesse. La trattazione è svolta per via sintetica.*

1. – Scopo della presente nota è la caratterizzazione di certe curve W dello spazio ordinario, ed in particolare della cubica gobba; a ciò si perviene mediante la costruzione di un sistema di invarianti legati alle curve stesse.

Un problema analogo è stato risolto da P. BUZANO (1) che ha caratterizzato la conica attraverso il valore assunto da un certo invariante proiettivo differenziale di una terna qualunque di E_1 che le appartengono. L'argomento è stato poi oggetto di osservazioni da parte di M. ALES (2) e dello stesso P. BUZANO (3). Il risultato della presente Nota può essere considerato come la inversione — per il caso dello spazio a tre dimensioni — di una osservazione di M. ALES (2) che ha rilevato una ovvia proprietà delle curve razionali normali di un S_n qualunque; che per tali curve gli invarianti proiettivi legati ad una terna di elementi differenziali qualunque devono essere indipendenti dalla terna stessa.

Tale inversione è qui ottenuta per una via puramente geometrica.

2. – Sia dunque A un punto dello spazio, a una retta per A, α un piano per la retta a; indicheremo brevemente il complesso costituito da questi elementi, aventi tra loro le relazioni di incidenza descritte, con (A, a, α); siano similmente due altri complessi (B, b, β), (C, c, γ); indichiamo con Γ la configurazione costituita dai tre complessi (A, a, α), (B, b, β), (C, c, γ).

(1) P. BUZANO, *Sull'invariante proiettivo di una terna di elementi curvilinei del I° ordine*, Boll. UMI - S. II°, Anno III, (941).

(2) M. ALES, *Osservazioni intorno agli invarianti proiettivi di terne di elementi curvilinei*, Rend. Circ. Mat. di Palermo - T. 63, (1940-41).

(3) P. BUZANO, *Osservazioni intorno agli invarianti proiettivi di elementi curvilinei*, Atti Acc. Sc. Torino - Vol. 81-82, (1948)

Ammesso che la configurazione Γ sia generica [4], essa possiede ovviamente tre invarianti proiettivi che possono essere costruiti come segue:

indichiamo con r_1 la retta per A che si appoggia alle rette b, c; analogamente indichiamo con r_2 la retta per B che si appoggia alle rette c, a; infine indichiamo con r_3 la retta per C che si appoggia alle rette a, b [5].

Indichiamo poi con α_1 il piano delle rette a, r_1, con α_2 quello delle a, r_2 e con α_3 quello delle a, r_3; con β_1 il piano delle rette b, r_1, con β_2 quello delle b, r_2, con β_3 quello delle b, r_3; infine indichiamo con γ_1 il piano delle rette c, r_1, con γ_2 quello delle c, r_2 e con γ_3 quello delle c, r_3.

Per caratterizzare la configurazione Γ assumeremo gli invarianti proiettivi dati dai tre birapporti (ovviamente indipendenti):

$$J_a = (\alpha\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$$
$$J_b = (\beta\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_1)$$
$$J_c = (\gamma\ \gamma_3\ \gamma_1\ \gamma_2)\,.$$

Sussiste ora il

TEOREMA I. - Fissati i complessi (A, a, α) e (B, b, β) ed il punto C (in posizione generica rispetto ai complessi) la conoscenza dei due invarianti J_a, J_b determina univocamente una retta c per C, e la ulteriore conoscenza dell'invariante J_c determina univocamente un piano γ per la c.

Infatti quando sia fissata la posizione dei due complessi (A, a, α) e (B, b, β) e del punto C sono determinati nel fascio a i tre piani α, α_2, α_3; quindi la conoscenza J_a determina univocamente il piano α_1 e di conseguenza la retta r_1, intersezione di α_1 con β_1; analogamente, poichè β, β_1, β_3 sono noti, la conoscenza di J_b determina univocamente la retta r_2, intersezione di α_2 e di β_2. Quindi la retta c per C è determinata come la retta che si appoggia alle r_1 ed r_2. Sono conosciuti pertanto i tre piani γ_1, γ_2, γ_3 del fascio c; la conoscenza di J_c permette infine la determinazione γ.

Come conseguenza immediata si ha il

COROLLARIO. - Condizione (ovviamente necessaria e) sufficiente affinchè due configurazioni Γ siano proiettive è che abbiano invarianti dello stesso nome rispettivamente uguali.

OSSERVAZIONE. - Non esiste nessuna omografia (tranne l'identità) che lasci fermi singolarmente i tre complessi; di conseguenza

(4) Nel senso che non presenti incidenze o appartenenze oltre a quelle indicate.

(5) Il lettore può utilmente aiutarsi con una facile figura schematica.

la configurazione Γ ammette al massimo un gruppo G_6 di sei omografie che la mutano in sè, isomorfo al gruppo totale di sostituzioni su tre elementi.

In proposito si ha il

TEOREMA II. - Condizione necessaria e sufficiente affinchè una configurazione Γ (in cui le rette a, b, c siano sghembe tra loro a due a due) ammetta un gruppo G_6 di omografie che la mutino in sè (permutando in tutti i modi possibili i tre complessi) è che i tre invarianti abbiano in comune il valore $+1$ oppure il valore -1.

Si dimostra che la condizione è necessaria osservando anzitutto che, nelle ipotesi del Teorema, si ha ovviamente

$$J_a = J_b = J_c .$$

Inoltre, sempre nelle ipotesi poste, si ha nel G_6 una omografia che muta Γ in sè, tenendo fermo il complesso (A, a, α) e scambiando tra loro i complessi (A, b, β) e (C, c, γ). Quindi tale omografia tiene ferma la retta r_1 e scambia tra loro le r_2 ed r_3 e di conseguenza si ha

$$(\alpha\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3) = (\alpha\, \alpha_1\, \alpha_3\, \alpha_2)$$

e quindi

$$J_a = \pm 1.$$

La sufficienza della condizione è assicurata dal Corollario del Teorema precedente.

OSSERVAZIONE. - La soluzione $J_a = 1$ porta come conseguenza che i piani α ed α_1 coincidono. Infatti è ovvio che la ipotesi $J_a = 1$ implica che i piani α, α_1, α_2, α_3 non siano tutti distinti tra loro. Ora la coincidenza di due fra i tre piani α_1, α_2, α_3 porta di conseguenza che le rette a, b, c non sono tutte sghembe tra loro; inoltre la coincidenza di α con α_2 oppure con α_3 porta di conseguenza che il piano α contiene il punto B od il punto C. Ora tutti questi fatti contrastano con le ipotesi di genericità che abbiamo ammesso per la configurazione Γ; pertanto il fatto che sia $J_a = 1$ implica la coincidenza di α con α_1. Analogamente da $J_b = 1$ e $J_c = 1$ si deduce che β coincide con β_2 e γ con γ_3.

3. Quanto è stato detto fin qui ammette una immediata applicazione alla caratterizzazione proiettivo-differenziale delle curve W dello spazio. Sussiste invero il

TEOREMA III. - Fissati i due complessi (A, a, α) e (B, b, β), i due invarianti J_a ed J_b determinano univocamente una congruenza di rette nello spazio e di conseguenza un sistema di equazioni differenziali del I° ordine, che ammettono come integrali le traiettorie W del gruppo semplicemente infinito di omografie generato da una omografia infinitesima Ω determinata da J_a ed J_b.

Infatti si fissino i complessi (A, a, α) e (B, b, β) ed il punto C; questa configurazione, come è noto, non ha invarianti. Allora la conoscenza di J_a ed J_b determina, in forza del Lemma, una retta c per C e di conseguenza una omografia infinitesima Ω che ammette (A, a, α) e (B, b, β) come elementi uniti e porta il punto C nel punto ad esso infinitamente vicino sulla c. Questa omografia Ω determina una congruenza di curve W; si tratta di constatare che la Ω, e quindi la congruenza di curve W, è indipendente dalla scelta di C nello spazio; ora questo è immediato quando si osservi che la Ω è permutabile con ogni omografia che ammette (A, a, α) e (B, b, β) come elementi uniti e porta C in un altro punto qualunque C' dello spazio.

Osservazione. Per valori generici degli invarianti J_a ed J_b le curve W che si ottengono in base al Teorema dimostrato hanno A e B come punti singolari.

In particolare da tutto quanto precede si deduce una caratterizzazione della cubica gobba, in base al seguente

Teorema IV - Condizione necessaria e sufficiente perchè una curva gobba k sia una cubica è che, detti A, B, C tre suoi punti qualunque, a, b, c le corrispondenti tangenti, α, β, γ i corrispondenti piani osculatori, la configurazione Γ data dai tre complessi (A, a, α), (B, b, β), (C, c, γ) abbia i tre invarianti uguali a -1.

Si dimostra che la condizione è necessaria ricordando che, se k è una cubica, esiste un gruppo G_6 di sei omografie che la mutano in sè, permutando in tutti i modi possibili i tre complessi (A, a, α), (B, b, β), (C, c, γ); quindi in forza del Teorema II, i tre invarianti della configurazione Γ costituita dai tre complessi suddetti possono avere il valore comune $+1$ oppure -1.

Ora si esclude che i tre invarianti possano avere il valore comune $+1$ in base alla Osservazione che segue il Teorema II; infatti se fosse $J_a = +1$ il piano α conterrebbe la retta r_1 e di conseguenza per questa passerebbe il piano osculatore α ed inoltre altri due piani (precisamente i piani delle rette $r_1 b$ ed $r_1 c$) tangenti altrove alla k, il che è impossibile. Infatti i piani per r_1 secherebbero fuori di A sulla k — che è razionale — una g_2^1 avente almeno tre coppie di punti coincidenti, date dai piani $(r_1 a)$, $(r_1 b)$, $(r_1 c)$.

La sufficienza della condizione è poi assicurata dal Teorema III e da quanto è stato osservato fin qui nel corso della dimostrazione.