Bollettino Unione Matematica Italiana

Luisa Minozzi

Sulle soluzioni sottoarmoniche dell'equazione di Liénard.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.2, p. 196–198.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_196_0>

Sulle soluzioni sottoarmoniche dell'equazione di Liénard.

Nota di Luisa Minozzi (a Bologna)

Sunto. - *Si considerano le equazioni differenziali ottenute uguagliando il primo membro dell'equazione di* Liénard *ad una funzione sinusoidale di pulsazione* ω, *e si mettono in evidenza particolari equazioni del tipo predetto che hanno soluzioni sinusoidali di pulsazione* $\frac{\omega}{n}$ *con* n *intero.*

1. Consideriamo l'equazione di Van der Pol per le oscillazioni forzate, più precisamente l'equazione:

$$\ddot{y} - (\alpha - \beta y^2)\dot{y} + \omega_0^2 y = C \cos 3\omega_0 t \tag{1}$$

dove α, β, ω_0, C sono costanti e $\ddot{y}$ e $\dot{y}$ sono le derivate prime e seconde di y rispetto al tempo t.

È ben noto che la (1) ammette (e del resto è facile la verifica) una soluzione della forma:

$$y = B \text{ sen } \omega_0 t \tag{2}$$

purchè sia:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{C^2\beta}{4\omega_0^2}}, \quad B = -\sqrt[3]{\frac{4C}{\omega_0\beta}}. \tag{2'}$$

Le soluzioni di questo tipo rientrano nelle soluzioni che potremo chiamare *soluzioni sinusoidali semplici di una equazione differenziale non lineare,* in quanto sono rappresentate da una funzione sinusoidale del tempo.

La (2) dimostra *l'esistenza di una soluzione sottoarmonica di ordine tre, dell'equazione di* Van der Pol, e, per quanto soluzione instabile ([1]), non è senza interesse, perchè prova la possibilità, per i sistemi fisici retti dall'equazione di Van der Pol, di oscillazioni sottoarmoniche.

In questa nota ricercheremo le eventuali soluzioni sinusoidali semplici per l'equazione di Liénard delle oscillazioni forzate, cioè per l'equazione:

$$y - \psi(y)\dot{y} + \omega_0^2 y = C \cos(\omega_1 t + \gamma) \tag{3}$$

dove ω_0, C, ω_1 e γ sono costanti, e $\psi(y)$ è un polinomio di grado $n-1$ nelle potenze pari di y, cioè (ovviamente $n-1$, $r-1$, sono pari):

$$\psi(y) = a_1 + a_3 y^2 + \dots + a_r y^{r-1} + \dots + a_n y^{n-1}. \tag{4}$$

([1]) Cfr. G. Colombo, *Sopra un singolare caso che si presenta in un problema di stabilità in meccanica non lineare,* « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova » XXII (1953) pag. 123-133.

Dimostreremo che questa equazione ammette soluzioni sinusoidali semplici solo se $\gamma=0$, $\omega_1=n\omega_0$, e $a_1, a_3, \dots, a_{n-2}$ sono particolari funzioni di C e a_n. Inoltre quelle soluzioni devono avere pulsazione ω_0.

Si prova così, in modo semplice, *l'esistenza di oscillazioni sottoarmoniche di ordine* n *per sistemi fisici retti da particolari equazioni di* LIÉNARD.

2. Premettiamo la seguente utile osservazione.

Si abbia l'equazione:

$$\ddot{x}-\varphi(\dot{x})+\omega_0^2 x=\frac{C}{\omega_1}\operatorname{sen}(\omega_1 t+\gamma)+K \tag{5}$$

in cui C, ω_1, ω_0, K sono costanti, le prime tre positive, $\varphi(\dot{x})$ è una funzione di $\dot{x}$ tale che $\dfrac{d\varphi(\dot{x})}{d\dot{x}}=\psi(\dot{x})$.

È facile dimostrare che se $\bar{x}$ è una soluzione sinusoidale semplice di (5), $\bar{y}=\dfrac{d\bar{x}}{dt}$ è una soluzione sinusoidale semplice di (3), e viceversa.

Infatti, ponendo nella (5) in luogo di x, $\bar{x}$, derivando rispetto al tempo e ricordando l'espressione di $\bar{y}$, si ottiene subito che $\bar{y}$ soddisfa la (3).

Viceversa, se $\bar{y}$ è soluzione sinusoidale semplice di (3), è facile vedere, integrando tale equazione e ponendo $\bar{x}$ uguale alla funzione sinusoidale che è primitiva di $\bar{y}$, che $\bar{x}$ è soluzione sinusoidale semplice di (5).

Perciò converrà ricercare le soluzioni sinusoidali semplici di (5), equazione più comoda da trattare, e poi eventualmente derivarle rispetto al tempo.

3. Ciò posto, consideriamo l'equazione del tipo (5) per cui $\dfrac{d\varphi}{d\dot{x}}$ coincide con la $\psi(\dot{x})$ espressa da (4), (in cui si dovrà porre $\dot{x}$ in luogo di y), cioè l'equazione:

$$\ddot{x}-\left(a_1\dot{x}+\frac{a_3\dot{x}^3}{3}+\dots+\frac{a_r\dot{x}^r}{r}+\dots+\frac{a_n\dot{x}^n}{n}\right)+\omega_0^2 x=\frac{C}{\omega_1}\operatorname{sen}(\omega_1 t+\gamma)+K. \tag{6}$$

Da quanto precede risulta che le derivate delle soluzioni sinusoidali semplici di (6) coincidono con quelle di (3) in cui $\psi(y)$ sia data da (4) e viceversa.

Poniamo perciò:

$$x=A\cos\omega t.$$

Si ha allora, sostituendo in (6):

$$-A\omega^2 \cos \omega t + a_1 A\omega \operatorname{sen} \omega t + \frac{a_3}{3} A^3\omega^3 \operatorname{sen}^3 \omega t + \dots + \frac{a_r}{r} A^r\omega^r \operatorname{sen}^r \omega t + \dots$$

$$\dots + \frac{a_n}{n} A^n\omega^n \operatorname{sen}^n \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t = \frac{C}{\omega_1} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \gamma) + K.$$

Esprimiamo le potenze dei seni in funzioni lineari di seni di ωt, e di multipli di ωt e dopo semplici passaggi abbiamo:

$$(A\omega_0^2 - A\omega^2) \cos \omega t + \left[a_1 A\omega + \frac{a_3}{2^2} A^3\omega^3 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}\cdot n} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} a_n A^n\omega^n \right] \cdot \operatorname{sen} \omega t +$$

$$+ \dots + (-1)^{\frac{r-1}{2}} \left[\frac{a_r}{2^{r-1} r} A^r\omega^r + \frac{a_{r+2}}{2^{r+1}} A^{r+2}\omega^{r+2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}\cdot n} \binom{n}{\frac{n-r}{2}} a_n A^n\omega^n \right] \cdot \operatorname{sen} r\omega t +$$

$$+ \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{a_n}{2^{n-1}\cdot n} A^n\omega^n \operatorname{sen} n\omega t = \frac{C}{\omega_1} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \gamma) + K.$$

Questa equazione è evidentemente soddisfatta solo se:

$$\omega = \omega_0, \quad \gamma = 0, \quad K = 0, \quad \omega_1 = n\omega_0$$

e se risulta:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{a_n A^n\omega^n}{2^{n-1}\cdot n} = \frac{C}{n\omega_0} \tag{7}$$

$$\frac{a_r A^r\omega^r}{2^{r-1}\cdot r} \omega^r + \frac{a_{r+2}}{2^{r+1}} A^{r+2}\omega^{r+2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}\cdot n} \binom{n}{\frac{n-r}{2}} a_n A^n\omega^n = 0. \tag{8}$$

La (8) vale per ogni r dispari compreso fra 1 e $n-2$, estremi inclusi.

Dalla (7), fissati C e a_n, si ricava l'ampiezza A della soluzione sinusoidale semplice di (6).

Dalle relazioni ricorrenti (8) si ricavano, in funzione di C e a_n, gli altri coefficienti del polinomio $\psi(y)$, per cui sono possibili soluzioni sinusoidali semplici di (3). Se $n = 3$, ponendo $a_1 = \alpha$, $a_3 = -\beta$ e tenendo presente $B = -\omega_0 A$, si ritrovano le formule (2) e (2').

Poichè $\omega_1 = n\omega_0 = n\omega$, si conclude che l'equazione di LIÉNARD, con $\psi(y)$ un polinomio di grado pari e con i coefficienti legati dalle relazioni (8), ammette soluzioni sottoarmoniche di ordine n, come si era affermato in principio.