BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FIORENZIA MORETTI

Alcune diseguaglianze relative alle funzioni armoniche nel complementare di un dominio limitato ed infinitesime all'infinito.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.2, p. 190–195.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_190_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Alcune diseguaglianze relative alle funzioni armoniche nel complementare di un dominio limitato ed infinitesime all' infinito.

Nota di FIORENZIA MORETTI (a Trieste)

Sunto. - *È contenuto nelle prime righe del testo.*

Oggetto della presente Nota sono alcune formule di maggiorazione di tipo globale relative alle funzioni armoniche all'esterno di un dominio limitato ed infinitesime all'infinito [1].

L'impiego di tali formule può essere utile nella risoluzione numerica di problemi al contorno per funzioni armoniche in un dominio illimitato avente frontiera limitata.

Indicato con D un siffatto dominio avente frontiera $\mathfrak{F}D$, composta da un numero finito di porzioni di superficie continue e dotate di piano tangente variabile con continuità e detta Ψ una funzione di classe 1 [2] in D, armonica nell'interno di D ed infinitesima all'infinito, ho potuto dimostrare i seguenti teoremi:

[1] Per quanto riguarda maggiorazioni di tipo globale per soluzioni di equazioni a derivate parziali lineari cfr. i seguenti lavori: R. CACCIOPPOLI, *Limitazioni integrali per le soluzioni di una equazione lineare ellittica a derivate parziali*, « Giornale di Matematiche di Battaglini », Vol. 80, (1950-51); J. B. DIAZ, *Inequalities and minimal principles in Mathematical Physics*, Inst. Fluid. Dynamics Appl. Math., Lect. Ser. No. 18, (November 1951): J. B. DIAZ - A. WEINSTEIN, *Schwarz inequality and the methods of Rayleigh-Ritz and Trefftz*, « Journ. Math. and Physics », No. 3, (1947); G. FICHERA, *Sulla maggiorazione dell'errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della Fisica Matematica*, Acc. Scienze di Napoli, S. IV, Vol. XVII, (1950); G. FICHERA, *Formule di maggiorazione connesse ad una classe di trasformazioni lineari*, Ann. di Mat., S. IV, Tomo XXXVI, (1954); L. E. PAYNE - H. F. WEINBERGER, *Upper and lower bounds for harmonic functions. Dirichlet integrals and biharmonic functions*, Inst. Fluid. Dynamics Appl. Math., University Maryland, College Park Maryland, Technical Note BN-21, (January 1954); G. POLYA, *Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization*, Quarterly of Appl. Math., Vol. VI, (1948); G. POLYA, *Estimating electrostatic capacity*, Ann. Math. Monthly, Vol. LIV, No. 4, (1947); G. POLYA - G. SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics*, University Press, Princeton, (1931); G. POLYA - A. WEINSTEIN, *On the torsional rigidity of multiply connected cross-section*, Ann. Math., Vol. LII, No. 1, (1950).

[2] Dicesi funzione di classe 1 in D una funzione continua assieme alle sue derivate prime in D. Vedremo nel corso delle dimostrazioni che i teoremi enunciati sussistono in ipotesi qualitative di maggior generalità per la Ψ.

I. – *Indicata con* ν *la normale a* $\mathfrak{F}$D *rivolta verso l'esterno di* D, *sussiste la diseguaglianza:*

$$\int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 d\sigma \leq H \int_{\mathfrak{F}D} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \tag{1}$$

essendo:

$$H = \left\{ 2 \frac{\max_{\mathfrak{F}D} \chi}{\min_{\mathfrak{F}D} \frac{\partial \chi}{\partial \nu}} \right\}^2 \tag{2}$$

ed avendo indicato con χ *una qualsivoglia funzione di classe* 1 *in* D, *armonica in* D — $\mathfrak{F}$D, *infinitesima all'infinito e verificante su* $\mathfrak{F}$D *le condizioni* $\chi > 0$, $\frac{\partial \chi}{\partial \nu} > 0$.

II. – *Sussiste la diseguaglianza:*

$$\int_{D} |\operatorname{grad} \Psi|^2 d\tau \leq \sqrt{H} \int_{\mathfrak{F}D} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \tag{3}$$

essendo H *definito come nel teorema precedente.*

III. – *Fissato comunque un punto* O *esterno a* D, *detta* r *la massima distanza del punto variabile su* $\mathfrak{F}$D *da* O *ed* R *un qualsiasi numero maggiore di* r *sussiste la diseguaglianza:*

$$\left(\int_{\mathfrak{F}D} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} d\sigma\right)^2 \leq \frac{4\pi}{R - r} \int_{D_R} \Psi^2 d\tau \tag{4}$$

essendo D_R *il dominio intersezione di* D *con quello sferico di centro* O *e raggio* R.

IV. – *Se* D_R *è il dominio introdotto nel teorema precedente, sussiste la seguente disuguaglianza:*

$$\int_{D_R} \Psi^2 d\tau \leq K \int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 d\sigma, \tag{5}$$

essendo:

$$K = \frac{\max_{\mathfrak{F}D} \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|}{\min_{D_R} \Delta_2 w} \tag{6}$$

ed avendo indicato con w *una arbitraria funzione di classe* 2 *in* D *verificante le:*

$$(7)\qquad |w| < \frac{k}{\overline{OP}}\,, \quad \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| > \frac{k}{\overline{OP}^2}\,, \quad \left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right| < \frac{k}{\overline{OP}^3} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

con k *costante e le:*

$$(8)\qquad w \leq 0 \text{ in } D, \quad w = 0 \text{ su } \mathfrak{F}D, \quad \Delta_2 w > 0 \text{ in } D.$$

1. *Dimostrazione del teorema I.*

Siano u e v due funzioni continue con le loro derivate parziali prime e seconde in D, e tali che si abbia:

$$|u| < \frac{k}{\rho}\,, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| < \frac{k}{\rho^2}\,, \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| < \frac{k}{\rho^3}$$

$$|v| < \frac{k}{\rho}\,, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| < \frac{k}{\rho^2}\,, \quad \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right| < \frac{k}{\rho^3} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

essendo k una costante e $\rho = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

Si ha:

$$(9)\qquad \int_{\mathfrak{F}D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\mathfrak{F}D} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_D (u\Delta_2 v - v\Delta_2 u) d\tau.$$

Sia Ψ una funzione armonica in $D - \mathfrak{F}D$, infinitesima all'infinito, avente le derivate prime di quadrato sommabile in D e tale che $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \nu}$ sia di quadrato sommabile su $\mathfrak{F}D$, sussistendo per la Ψ la ben nota relazione:

$$(10)\qquad \int_{\mathfrak{F}D} \Psi \frac{\partial \Psi}{\sigma \nu} d\sigma = \int_D |\operatorname{grad} \Psi|^2 d\tau.$$

In particolare la Ψ può essere continua in D con le sue derivate prime, come in precedenza detto.

Sia χ la funzione di cui all'enunciato del teorema I e si assuma $u = \Psi^2$, $v = \chi$. Le condizioni precedenti sono allora soddisfatte.

Per la (9) riesce:

$$\int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 \frac{\partial \chi}{\partial \nu} d\sigma - 2\int_{\mathfrak{F}D} \chi\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} d\sigma = -2\int_D \chi\, |\operatorname{grad} \Psi|^2 d\tau.$$

Si ha:

$$\int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 \frac{\partial \chi}{\partial \nu} d\sigma \geq \min_{\mathfrak{F}D} \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 d\sigma$$

$$\int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 \frac{\partial \chi}{\partial \nu} d\sigma \leq 2 \max_{\mathfrak{F}D} \chi \int_{\mathfrak{F}D} |\Psi| \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right| d\sigma .$$

Da queste due ultime disuguaglianze si ricava:

$$\int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 d\sigma \leq \frac{2 \max_{\mathfrak{F}D} \chi}{\min_{\mathfrak{F}D} \frac{\partial \chi}{\partial \nu}} \int_{\mathfrak{F}D} |\Psi| \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right| d\sigma$$

e per la disuguaglianza di SCHWARZ si ottiene infine la (1).

OSSERVAZIONE. - Nel caso che D sia l'insieme dei punti non interni ad una sfera di raggio r può agevolmente calcolarsi il massimo del funzionale:

$$I = \frac{\int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 d\sigma}{\int_{\mathfrak{F}D} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma} .$$

Tale massimo è dato da r^2 ed è conseguito assumendo $\Psi = \frac{1}{\rho}$.

A ciò si perviene, con un semplice calcolo, tenendo presente lo sviluppo:

$$\Psi(\rho, P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{a_k^{(n)} Y_k^{(n)}(P)}{\rho^{n+1}} \tag{11}$$

dove $\{Y_k^{(n)}(P)\}$ è un sistema ortonormale e completo sulla sfera unitaria di funzioni sferiche.

Perciò il miglior valore di H per la (1) è $H = r^2$. Invece la (2), assumendo $\chi = \frac{1}{\rho}$, fornisce $H = 4r^2$.

2. *Dimostrazione del teorema II.*

Dalla (10) e dalla (1) segue:

$$\int_D |\operatorname{grad} \Psi|^2 d\tau \leq \left(\int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 d\sigma \right)^{1/2} \left(\int_{\mathfrak{F}D} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq \sqrt{H} \int_{\mathfrak{F}D} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma .$$

OSSERVAZIONE. - Nel caso che D sia l'insieme dei punti non interni ad una sfera di raggio r, si può facilmente calcolare il massimo del funzionale:

$$I = \frac{\int_D |\operatorname{grad} \Psi|^2 d\tau}{\int_{\mathfrak{F}D} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma} .$$

Anche in questo caso si fa uso dello sviluppo (11) e si ottiene $\max I = r$, mentre la (2) dà $\sqrt{H} = 2r$.

3. *Dimostrazione del teorema III.*

Per una funzione armonica in $D - \mathfrak{F}D$ ed infinitesima all'infinito sussiste la seguente formula:

$$\int_{\Sigma_\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\, d\sigma = \frac{1}{\rho} \int_{\Sigma_\rho} \Psi d\sigma \tag{12}$$

essendo Σ_ρ una superficie sferica di raggio ρ contenuta in D e tale che il dominio T_ρ da essa limitato contenga nel suo interno $\mathfrak{F}D$ (³).

Fissati r ed R tali che $R > r$ e che T_r contenga nel suo interno $\mathfrak{F}D$ dalla (12) si deduce tenendo presente che il primo membro non dipende da ρ:

$$(R - r)^2 \left(\int_{\Sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\, d\sigma \right)^2 = \left(\int_{T_R - T_r} \frac{1}{\rho} \cdot \Psi d\tau \right)^2 \tag{13}$$

dalla quale deduciamo:

$$\left(\int_{\Sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\, d\sigma \right)^2 \leq \frac{4\pi}{R - r} \int_{D_R} \Psi^2 d\tau \tag{14}$$

cioè la (4). Si noti che se $\mathfrak{F}D$ coincide colla sfera Σ_r e si assume $\Psi = \dfrac{r}{\rho}$, nella (14) sussiste il segno eguale.

4. *Dimostrazione del teorema IV.*

Sia Σ_R una superficie sferica contenente nel suo interno $\mathfrak{F}D$ e D_R il dominio avente come frontiera $\mathfrak{F}D$ (interna) e Σ_R (esterna); assunto allora, nella (9), $u = \Psi^2$ e $v = w$, riesce:

$$\int_{D_R} \Psi^2 \Delta_2 w d\tau \leq \int_{D} \Psi^2 \Delta_2 w d\tau \leq \int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 \frac{\partial w}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

ne segue:

$$\min_{D_R} \Delta_2 w \int_{D_R} \Psi^2 d\tau \leq \max_{\mathfrak{F}D} \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right| \int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 d\sigma,$$

(³) Cfr. M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*, II ed., Rondinella Napoli, (1946), pp. 154 e segg.

cioè:

$$\int_{D_R} \Psi^2 d\tau \leq K \int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 d\sigma .$$

Osservazione. - Nel caso che $\mathfrak{F}D$ sia una superficie sferica di raggio r, con che D_R diviene uno strato sferico, il massimo del funzionale:

$$I = \frac{\int_{D_R} \Psi^2 d\tau}{\int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 d\sigma}$$

nella classe delle funzioni armoniche in $D - \mathfrak{F}D$ ed infinitesime all'infinito è $R - r$ ed è assunto in corrispondenza alla funzione $\frac{1}{\rho}$.

Nel caso in ispecie si può assumere per la w, verificante le (7) e (8), la funzione $w = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r\rho}$. Si ottiene allora $K = \frac{R^4}{2r^3}$.

Si noti che da (4) e (5) si deduce la seguente diseguaglianza:

$$\left(\int_{\mathfrak{F}D} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} d\sigma \right)^2 \leq M \int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 d\sigma \tag{15}$$

con

$$M = K \cdot \frac{4\pi}{R - r} .$$

Una diseguaglianza del tipo della (15) è già stata considerata da W. Gross [4], il quale, però, assume come M valori ottenuti calcolando numericamente (per difetto) l'estremo superiore del funzionale:

$$I = \frac{\left(\int_{\Sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} d\sigma \right)^2}{\int_{\mathfrak{F}D} \Psi^2 d\sigma} .$$

[4] Cfr. W. Gross, *Sul calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore*, Rend. Acc. Naz. Lincei, S. VIII. Vol. XII, fasc. 5.