Bollettino
Unione Matematica Italiana

Emilio Gagliardo

Sui criteri di oscillazione per gli integrali di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.2, p. 177–189.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_177_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Sui criteri di oscillazione per gli integrali di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Nota di EMILIO GAGLIARDO (a Genova)

Sunto. - *La presente Nota è dedicata alla ricerca di condizioni sufficienti atte ad assicurare che (tutti) gli integrali dell'equazione* $y''+A(x)y=0$ *abbiano, per* $x \to +\infty$, *comportamento asintotico oscillatorio. Utilizzando un risultato di* A. WINTNER *relativo a questo problema, ed una opportuna trasformazione della variabile e della funzione incognita, si ottiene un criterio assai più generale contenente anche risultati di* M. ZLÀMAL *che estendono criteri di* KNESER, FITE, HILLE, HARTMAN, MIKUSINSKI, LEIGHTON.

La ricerca delle condizioni sufficienti sotto le quali uno e quindi (1) tutti gli integrali dell'equazione differenziale:

$$y''(x) + A(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

ove $A(x)$ è una funzione reale definita e continua per ogni $x \geq x_0$, hanno per $x \to +\infty$ comportamento asintotico oscillatorio (2) è stata oggetto di studio — soprattutto recentemente — da parte di vari Autori.

Un primo teorema di oscillazione è stato stabilito da KNESER [7] supponendo che il coefficiente $A(x)$ soddisfi alla limitazione:

$$A(x) \geq \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right)\frac{1}{x^2}, \qquad \varepsilon > 0. \tag{1.1}$$

In un ordine di idee assai diverso è un criterio di FITE [2]. Per quel che riguarda l'equazione (1) le condizioni sufficienti per l'oscillazione sono espresse da:

$$\int^{\infty} A(x)dx = +\infty, \qquad A(x) > 0. \tag{1.2}$$

(1) Come segue dal classico teorema di separazione di STURM.

(2) Hanno cioè infiniti zeri; in breve: sono oscillanti. Si usa anche dire che in tal caso l'equazione (1) è oscillatoria.

Questi due criteri sono evidentemente indipendenti ([3]) e di natura differente.

Più recentemente HILLE [6], ([4]), ed HARTMAN [3] hanno stabilito contemporaneamente, un teorema di oscillazione nell'ordine di idee del criterio di KNESER, e precisamente hanno sostituito alla (1.1) l'ipotesi:

$$\text{(1.3)} \qquad \min\lim_{x \to +\infty} [L_p(x)]^2 \left\{ A(x) - \sum_0^{p-1} [L_i(x)]^{-2} \right\} > \frac{1}{4}$$

(ove: $p =$ intero ≥ 0; $L_p(x) = x (\log x) (\log \log x) \dots (\log^{(p)} x)$; $\log^{(p)} x = \log \log^{(p-1)} x$; $\log^{(0)} x = x$)

la quale per $p = 0$ si riduce alla (1.1).

L'indirizzo di FITE è stato invece proseguito da MIKUSINSKI [9] il quale per quanto riguarda l'equazione (1), ha stabilito un teorema di oscillazione nell'ipotesi:

$$\text{(1.4)} \qquad \int^{\infty} x^{1-\varepsilon} A(x) \mathrm{d}x = +\infty, \qquad 0 < \varepsilon < 1, \qquad A(x) \geq 0.$$

e da WINTNER [11] che ha, nel criterio di FITE, soppresso per la funzione $A(x)$ ogni limitazione inferiore, e formulato la sola ipotesi:

$$\text{(1.5)} \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int^{t} ds \int^{s} A(x) dx = +\infty.$$

Il criterio (1.3) di HILLE-HARTMAN che estende quello di KNESER, il criterio (1 4) di MIKUSINSKI, ed il criterio (1.5) di WINTNER che generalizza il risultato di FITE, sono però a due a due indipendenti ([5]).

Dello stesso problema di oscillazione si è occupato LEIGHTON [8] a proposito dell'equazione autoaggiunta più generale:

$$\text{(2)} \qquad [Q(x)y']' + A(x)y = 0, \qquad Q(x) > 0,$$

con $A(x)$, $Q(x)$ funzioni continue. Le condizioni sufficienti sono espresse da:

$$\text{(2.1)} \qquad \int^{\infty} \frac{dx}{Q(x)} = +\infty, \qquad \int^{\infty} A(x) dx = +\infty. \qquad A(x) > 0.$$

([3]) Per la verifica di quanto si asserisce circa l'indipendenza dei criteri che riportiamo, cfr. gli esempi del n. 5.

([4]) Per esattezza rileviamo che, a differenza di quanto si suppone nell'enunciato di HARTMAN e nel presente lavoro, la funzione $A(x)$ nell'enunciato di HILLE è supposta sommabile (anzichè continua) in ogni intervallo finito, ma deve inoltre soddisfare alla limitazione: $A(x) \geq 0$.

([5]) Cfr. ([3]).

A queste M. ZLÀMAL [12] ha sostituito le seguenti più generali:

$$(2.2)\qquad \int^{\infty}\frac{dx}{Q(x)}=+\infty,\quad \int^{\infty}Q(x)M'^{2}(x)dx<+\infty,\quad \int^{\infty}A(x)M^{2}(x)dx=+\infty,$$

ove $M(x)$ indica una funzione >0 e continua con la derivata prima. Limitandoci all'equazione (1) le (2.2) ri riducono a:

$$(1.6)\qquad \int^{\infty}M'^{2}(x)dx<+\infty,\qquad \int^{\infty}A(x)M^{2}(x)dx=+\infty$$

e, come caso particolare, alla:

$$(1.7)\qquad \int^{\infty}x^{1-\varepsilon}A(x)dx=+\infty,\qquad \varepsilon>0.$$

Ciò fornisce un criterio, sempre dovuto ad M. ZLÀMAL, che, come si vede, estende quello di MIKUSINSKI espresso dalla (1.4).

Un nuovo criterio di oscillazione di ZLÀMAL, non contenuto (6) in alcuno dei precedenti, è stato stabilito, sempre nello stesso lavoro citato in [12], nella ipotesi:

$$(1.8)\qquad \int^{\infty}\left\{A(x)L_p(x)-\frac{1}{4}L_p(x)\sum_{0}^{p}{}_{i}\,[L_i(x)]^{-2}\right\}dx=+\infty$$

(ove le notazioni sono già state chiarite a proposito della (1.3)).

Quest'ultimo criterio contiene (7), come si vede facilmente, il criterio espresso dalla (1.3), e, sebbene non contenga alcuno degli altri criteri dello stesso Autore e neppure quello di WINTNER, può essere interpretato come un tentativo di combinare l'indirizzo di KNESER - HILLE - HARTMAN con quello di FITE - MIKUSINSKI - WINTNER (8).

La questione di combinare i due indirizzi viene risolta nel presente lavoro nel quale mostro come, utilizzando il solo criterio

(6) Cfr. (3).

(7) Ciò non sembra risultare a ZLÀMAL stando a quanto egli dice in proposito (cfr. [12]).

(8) Ricordiamo ancora, per completare questa rassegna dei criteri di oscillazione, un criterio valido quando $A(x)\geq 0$ contenuto implicitamente in un risultato di HILLE ([6], teorema 5); un criterio di ZLÀMAL [12] valido quando $A(x)$ è inferiormente limitata; un criterio di WINTNER esteso da HARTMAN [4] valido quando $A(x)$ è tale che esista finito l'integrale improprio $\int^{\infty}A(x)dx$; ed infine alcuni affinamenti del criterio (1. 5) contenuti implicitamente in un lavoro di HARTMAN [5] ed alcuni risultati di R. L. POTTER (*On self adjoint equations...* Pacific J. Math. 3 (1953) 467-491) validi quando $A(x)>0$. Per questi teoremi vedi l'osservazione fatta in (12).

(1.5) di WINTNER ed una trasformazione della variabile e della funzione incognita, che mi è stata suggerita dal Prof. GUIDO ASCOLI, si ottiene immediatamente un criterio notevolmente più generale che contiene tutti i criteri espressi dalle (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8).

Per quel che riguarda poi l'equazione (2), supposto divergente l'integrale $\int^{\infty}\frac{dx}{Q(x)}$, ci si riduce [9] con una opportuna trasformazione della variabile indipendente ad una equazione di tipo (1); e pertanto dai criteri di oscillazione validi per l'equazione (1) si ottengono immediatamente altrettanti criteri validi per la (2). Ad esempio il criterio (2.1) si ricava immediatamente dal criterio (1.2) e il criterio (2.2) dal criterio (1,6).

Del problema di oscillazione per l'equazione (1) mi ero occupato in una precedente Nota [10] pervenendo fra l'altro a due criteri (I e III) che sono contenuti, come mi ha fatto osservare M. ZLÀMAL, rispettivamente nel criterio (1.5) di WINTNER e nel criterio (1.8) dello stesso ZLÀMAL. Colgo l'occasione per ringraziare il Prof. ZLÀMAL della cortese segnalazione.

1. Consideriamo la seguente trasformazione della variabile e della funzione incognita:

$$\xi=\int\frac{dx}{M^2(x)}\qquad \eta=\frac{y}{M(x)}$$

Essa, come è noto [1], muta l'equazione (1) nella seguente:

$$\eta''(\xi)+B(\xi)\eta(\xi)=0$$

ove il nuovo coefficiente B ha la forma: $B=AM^4+M^3M''$.

Supposto $M(x)>0$, $\int^{\infty}\frac{dx}{M^2(x)}$ divergente, il carattere oscillatorio degli integrali si conserva, e quindi se si applica alla nuova equazione il criterio (1.5) di WINTNER si ottiene per l'equazione (1) il seguente criterio notevolmente più generale:

Indichiamo con M(x) *una funzione positiva, continua con le*

[9] Questa osservazione è stata fatta, a proposito del criterio (2.1), da HARTMAN nella sua recensione, sul «Mathematical Reviews», del lavoro di LEIGHTON citato in [8]. Cfr. «Mat. Rew.», 11, (1950), p. 248.

[10] *Sul comportamento asintotico...* «Boll. U.M.I.», (3), 7, (1953), 177-185.

sue derivate prima e seconda per ogni $x \geq x_0$. *e tale che risulti:*

(3) $$\int^{\infty} \frac{dx}{M^2(x)} = +\infty \quad (^{11}).$$

Posto:

(4) $$F(s) = \int_{x_0}^{s} \{ A(x)M^2(x) + M(x)M''(x) \} dx$$

se questa funzione soddisfa alla:

(5) $$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_{x_0}^{t} F(s)ds = +\infty$$

o, in particolare, alla:

(6) $$\lim_{s \to +\infty} F(s) = +\infty$$

allora tutti gli integrali dell'equazione (1) *sono oscillanti* [12].

2. L'ipotesi espressa dalle (4), (5) si può scrivere nella forma:

(7) $$\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{1}{t} \int_{x_0}^{t} ds \int_{x_0}^{s} A(x)M^2(x)dx + \frac{1}{t} \int_{x_0}^{t} ds \int_{x_0}^{s} M(x)M''(x)dx \right] = +\infty$$

la quale, mediante una integrazione per parti, e potendo tralasciare una espressione del tipo: $c_0 + c_1 t^{-1}$ con c_0, c_1 costanti, diventa:

(8) $$\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{M^2(t)}{2t} + \frac{1}{t} \int_{x_0}^{t} ds \int_{x_0}^{s} (A(x)M^2(x) - M'^2(x))dx \right] = +\infty.$$

[11] Può riuscire utile osservare che date due funzioni (eguali o diverse) soddisfacenti entrambe a questa ipotesi, e siano esse: $M_1(x)$, $M_2(x)$, se ne ottiene subito un'altra soddisfacente ancora alla stessa ipotesi assumendo: $M_3(x) = M_1(x)M_2(z(x))$, con $z(x) = \int \frac{dx}{M_1^2(x)}$. La verifica di ciò è immediata.

[12] Osserviamo che il procedimento seguito in questo numero può essere applicato, anzichè al criterio (1.5), a uno qualunque dei criteri citati in [8] o anche ai noti criteri di non oscillazione. Lasciamo al lettore le facili formulazioni dei teoremi che così si ottengono. Non si ottiene invece alcun nuovo risultato (cfr. [14]) utilizzando gli altri criteri che abbiamo riportato.

Sussiste ora il seguente criterio:

Se esiste una funzione M(x) > 0 *continua con la derivata prima per* $\mathrm{x} \geq \mathrm{x}_0$ *e tale che siano verificate le* (3), (8), *tutti gli integrali della* (1) *sono oscillanti.*

Questo teorema discende dal precedente poichè nelle ipotesi ora poste esiste, oltre alla $M(x)$, anche una funzione $M_*(x) > 0$ continua con le derivate prima e seconda soddisfacente ancora alle (3), (8), (e pertanto alle ipotesi del criterio dato al n. 1).

La dimostrazione di questo fatto, di per sè intuitivo, può ottenersi nel seguente modo:

Poniamo, per ogni valore dell'intero n, $x_n = x_0 + n$.

Poichè $M(x)$ è continua con la derivata prima in ogni intervallo finito, per un noto teorema, (cfr. ad es. [10]), fissata una successione arbitraria $\{\varepsilon_n\}$, $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, di numeri positivi decrescenti, esiste una successione di polinomi $\{P_n(x)\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, tali che si abbia:

$$\left\{ \begin{array}{l} | P_n(x) - M(x) | < \varepsilon_n \\ | P_n'(x) - M'(x) | < \varepsilon_n \end{array} \right\} \quad \text{per} \quad x_{n-1} \leq x \leq x_{n+1}. \tag{9}$$

Posto:

$$f(\vartheta) = \frac{(1-\vartheta)^3}{\vartheta^3 + (1-\vartheta)^3}$$

risulta:

$$0 \leq f(\vartheta) \leq 1, \qquad -3 \leq f'(\vartheta) \leq 0, \qquad \text{per} \qquad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

Consideriamo ora la funzione $M_*(x)$ così definita:

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_*(x) = P_1(x). & \text{per } x_0 \leq x \leq x_1. \\ M_*(x) = f(\vartheta) P_n(x) + [1 - f(\vartheta)] P_{n+1}(x), & \text{per } x_n \leq x = x_n + \vartheta \leq x_{n+1}, \; n \geq 1. \end{array} \right.$$

È facile verificare anzitutto che la funzione $M_*(x)$ ora introdotta è continua con le derivate prima e seconda (anche nei punti x_n).

Dalla definizione di $M_*(x)$ segue inoltre:

$$| M_*(x) - M(x) | < \varepsilon_1 < 3\varepsilon_0; \quad | M_*'(x) - M'(x) | < \varepsilon_1 < 9\varepsilon_0; \quad \text{per } x_0 \leq x \leq x_1,$$

e per $x_n \leq x = x_n + \vartheta \leq x_{n+1}$, $n \geq 1$:

$$|M_*(x) - M(x)| = |(P_{n+1} - M) + f(\vartheta)[(P_n - M) - (P_{n+1} - M)]| < \\ < \varepsilon_{n+1} + (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) < 3\varepsilon_n ;$$

$$|M_*'(x) - M'(x)| = |(P'_{n+1} - M') + f(\vartheta)[(P'_n - M') - (P'_{n+1} - M')] + \\ + f'(\vartheta)[(P_n - M) - (P_{n+1} - M)]| < \varepsilon_{n+1} + (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) + 3(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) < 9\varepsilon_n .$$

Di qui segue, per $x_n \leq x \leq x_{n+1}$, $n \geq 0$:

$$|M_*(x) - M(x)| < 3\varepsilon_n, \qquad |M_*'(x) - M'(x)| < 9\varepsilon_n$$

$$(10_1) \quad |M_*^2(x) - M^2(x)| \leq |M_* \quad M|(|M_* - M| + 2M) < 9\varepsilon_n^2 + 6k_n\varepsilon_n$$

$$(10_2) \quad |A(x)M_*^2(x) - A(x)M^2(x)| \leq |M_* - M|(|M_* - M| + 2M)|A| < \\ < 9k_n\varepsilon_n^2 + 6k_n^2\varepsilon_n$$

$$(10_3) \quad |M_*'^2(x) - M'^2(x)| \leq |M_*' - M'|(|M_*' - M'| + 2|M'|) < 81\varepsilon_n^2 + 18k_n\varepsilon_n$$

ove k_n indica un numero superiore ai valori di $M(x)$, $|M'(x)|$, $|A(x)|$ nell'intervallo (x_n, x_{n+1}).

Convenendo di prendere $\varepsilon_n < \frac{1}{6} h_n$, ove $h_n (> 0)$ indica il minimo di $M(x)$ in (x_n, x_{n+1}), si ha ivi:

$$M_*(x) > \frac{1}{2} h_n > 0$$

e pertanto

$$(10_4) \quad \left| \frac{1}{M_*^2(x)} - \frac{1}{M^2(x)} \right| \leq \frac{|M_* - M|(|M_* - M| + 2M)}{M_*^2 M^2} < \frac{9\varepsilon_n^2 + 6k_n\varepsilon_n}{\frac{1}{4} h_n^4}$$

Conveniamo inoltre di prendere ε_n tale che gli ultimi membri delle $(10_1)(10_2)(10_3)(10_4)$ risultino minori di $\frac{1}{(n+2)^2}$.

Si conclude che, scegliendo opportunamente la successione $\{\varepsilon_n\}$, la funzione $M_*(x)$, per $x \geq x_0$, è positiva, e, risultando i primi membri delle $(10_1) \ldots (10_4)$ minori di $\frac{1}{(x - x_0 + 1)^2}$, soddisfa, come $M(x)$, alle (3), (8); ciò dimostra l'asserto.

3. Consideriamo ora l'equazione autoaggiunta più generale (2) nella quale le funzioni $A(x)$, $Q(x)$ soddisfino alle condizioni:

$$(11)\qquad \begin{cases} A(x) \text{ continua, } Q(x) > 0 \text{ e continua, per } x \geq x_0 \\ \displaystyle\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{Q(x)} = +\infty . \end{cases}$$

Si può allora porre:

$$(12)\qquad \bar{x}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{Q(u)}$$

ed assumere $\bar{x}$, che è funzione crescente di x e tende a $+\infty$ con x, come nuova variabile indipendente; con ciò il carattere asintotico oscillatorio degli integrali si conserva, e l'equazione (2) si muta nella:

$$(13)\qquad y''(\bar{x}) + A(f(\bar{x}))Q(f(\bar{x}))y(\bar{x}) = 0$$

ove $x = f(\bar{x})$ rappresenta la funzione inversa della (12).

A questa equazione, che è del tipo (1), possono ora essere applicati i criteri di oscillazione validi per la (1), ottenendo così altrettanti criteri validi per l'equazione (2). Ad esempio dal criterio (1.6) si ottiene immediatamente il criterio (2.2); infatti posto $N(x) = M(\bar{x}(x))$ le ipotesi (1.6), applicate alla (13), si scrivono:

$$+\infty > \int^{\infty} [M'(\bar{x})]^2 d\bar{x} = \int^{\infty} [N'(x)Q(x)]^2 \frac{dx}{Q(x)} = \int^{\infty} [N'(x)]^2 Q(x)dx$$

$$+\infty = \int^{\infty} A(f(\bar{x}))Q(f(\bar{x}))M^2(\bar{x})d\bar{x} = \int^{\infty} A(x)N^2(x)dx$$

le quali, unitamente alle (11) costituiscono appunto le ipotesi del criterio (2.2). L'analoga estensione all'equazione (2) del criterio stabilito al n. 1 non offre difficoltà.

4. Dimostriamo in questo numero che i criteri relativi all'equazione (1) che abbiamo riportati sono tutti contenuti nel criterio stabilito nel presente lavoro.

Anzitutto è ovvio che il criterio (1.5) di WINTNER si ottiene da esso assumendo $M(x) = 1$.

Se si assume invece $M(x)=\sqrt{L_p(x)}=\sqrt{x(\log x)(\log\log x)\ldots(\log^{(p)} x)}$ [13], (secondo le notazioni usate), e ci si limita all'ipotesi (6), meno generale della (5), si ottiene il criterio (1.8) di ZLAMÀL.

Per verificare ciò osserviamo che, per ogni intero $n\geq 0$, la derivata della funzione $L_n(x)$ è:

$$L'_n(x)=[(\log x)(\log\log x)\ldots(\log^{(n)} x)]+[(\log\log x)\ldots(\log^{(n)} x)]+\ldots$$

$$\ldots+(\log^{(n)} x)+1=\frac{L_n}{x}+\frac{L_n}{x(\log x)}+\frac{L_n}{x(\log x)(\log\log x)}+\ldots+\frac{L_n}{L_n}=$$

$$=L_n\left(\frac{1}{L_0}+\frac{1}{L_1}+\ldots+\frac{1}{L_n}\right).$$

Tenendo conto di ciò si ottiene:

$$M'(x)=(\sqrt{L_p(x)})'=\frac{L_p'}{2\sqrt{L_p}}=\frac{\sqrt{L_p}}{2}\left(\frac{1}{L_0}+\frac{1}{L_1}+\ldots+\frac{1}{L_p}\right)$$

e derivando ancora:

$$M''(x)=\frac{L_p'}{4\sqrt{L_p}}\left(\frac{1}{L_0}+\ldots+\frac{1}{L_p}\right)+\frac{\sqrt{L_p}}{2}\left(-\frac{L_0'}{L_0^2}-\ldots-\frac{L_p'}{L_p^2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{L_p}}{4}\left(\frac{1}{L_0}+\ldots+\frac{1}{L_p}\right)^2-\frac{\sqrt{L_p}}{2}\left[\frac{1}{L_0}\left(\frac{1}{L_0}\right)+\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{L_0}+\frac{1}{L_1}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{L_p}\left(\frac{1}{L_0}+\ldots+\frac{1}{L_p}\right)\right]=-\frac{\sqrt{L_p}}{4}\left(\frac{1}{L_0^2}+\ldots+\frac{1}{L_p^2}\right)$$

e infine:

$$A(x)M^2(x)+M(x)M''(x)=A(x)L_p(x)-\frac{1}{4}L_p(x)\sum_0^p{}_i\,[L_i(x)]^{-2}$$

ossia, con la scelta fatta per la funzione $M(x)$ l'ipotesi espressa dalle (4), (6) si riduce alla (1.8).

Dimostriamo ora che il criterio del n. 1 contiene il criterio (1.7) di ZLAMÀL.

L'ipotesi espressa dalle (4), (5) si può scrivere nella forma (7).

Assumendo in particolare $M(x)=x^{(1-\varepsilon)/2}$, con $\varepsilon>0$, e potendo tralasciare un'espressione del tipo: $C_0+C_1t^{-1}+C_2t^{-\varepsilon}$, con C_0, C_1, C_2 costanti, essa diventa:

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{t}\int_{x_0}^{t}ds\int_{x_0}^{s}A(x)x^{1-\varepsilon}dx\right]=+\infty$$

[13] Adoperando il procedimento esposto in [11], a partire dalla sola funzione $M_1(x)=\sqrt{x}$, l'introduzione della funzione $M(x)=\sqrt{L_p(x)}$ riesce del tutto spontanea.

la quale è certo soddisfatta se si verifica l'ipotesi (1.7).

Dalla formulazione data al n. 2 del criterio stabilito al n. 1 si ottiene infine, come caso particolare, il criterio (1.6) di ZLÀMAL.

Supponiamo infatti che $M(x)$ sia una funzione continua con la derivata prima e soddisfacente alla ipotesi:

$$\int_{x_0}^{\infty} M'^2(x)dx = c_1 \neq \infty.$$

Si ha allora, per la diseguaglianza di SCHWARZ:

$$M(x) = M(x_0) + \int_{x_0}^{x} M'(v)dv \leq M(x_0) +$$

$$+ \sqrt{\int_{x_0}^{x} M'^2(v)dv} \; \sqrt{x - x_0} \leq c_0 + c_1 \sqrt{x - x_0}$$

ove $c_0 = M(x_0)$; e quindi, per x abbastanza grande, $M^2(x) < cx$, con c costante. La (3) è allora verificata, e la (8) si riduce a:

$$\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{1}{t} \int_{x_0}^{t} ds \int_{x_0}^{s} A(x)M^2(x)dx\right] = + \infty$$

che comprende come caso particolare l'ipotesi $\int^{\infty} AM^2 dx = + \infty$ che compare in (1.6).

I criteri espressi dalle (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) sono poi contenuti nei criteri (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) e pertanto rientrano anch'essi in quello stabilito nella presente Nota [14].

5. In questo numero diamo alcuni esempi per dimostrare quanto si è affermato sull'indipendenza dei criteri riportati all'inizio di questo lavoro.

[14] Risultando tutti questi criteri ottenibili dal criterio del n. 1 con una scelta particolare della funzione $M(x)$, e tenendo conto che le trasformazioni di variabile e di funzione incognita considerate al n. 1 formano gruppo, è del tutto inutile sperare di ottenere criteri più generali applicando il procedimento del n. 1 a uno di questi criteri diverso da quello (1.5) che si è utilizzato.

1. - Sia $A(x) = x^{-2}$, $(x_0 > 0)$. Il criterio (1.8) è soddisfatto con $p = 0$. I criteri (1.5), (1.7) falliscono. Dimostriamo che anche il criterio (1.6) non è applicabile. Supponiamo infatti per assurdo che esista una funzione $M(x)$ soddisfacente alle ipotesi (1.6). Si ha:

$$\int_{x_0}^{\infty} M'^2(x)dx = c_1 \neq \infty.$$

Posto $G(s) = \int_{x_0}^{s} A(x) M^2(x)dx$, con $s > x_0 > 0$, nel nostro caso, eseguendo una integrazione per parti e applicando la disuguaglianza di SCHWARZ, si ottiene:

$$G(s) = \int_{x_0}^{s} \frac{M^2(x)}{x^2} dx = -\frac{M^2(s)}{s} + \frac{M^2(x_0)}{x_0} + 2\int_{x_0}^{s} \frac{M(x)}{x} M'(x)dx \leq$$

$$\leq c_0 + 2\int_{x_0}^{s} \frac{M}{x} M'dx \leq c_0 + 2 \sqrt{\int_{x_0}^{s} \frac{M^2}{x^2} dx} \sqrt{\int_{x_0}^{s} M'^2 dx} \leq$$

$$\leq c_0 + c_2 \sqrt{\int_{x_0}^{s} \frac{M^2}{x^2} dx} = c_0 + c_2 \sqrt{G(s)},$$

ove $c_0 = \frac{1}{x_0} M^2(x_0)$, $c_2 = 2\sqrt{c_1}$.

Da ciò si ottiene: $G(s) \leq \max[c_0,\ c_2^2 - 2c_0] = c$ (costante); ma allora l'ipotesi $\int^{\infty} AM^2dx = +\infty$ che figura in (1.6) non può essere verificata.

2. - Sia ora: $A(x) = \sin^2 x + x \sin 2x$. Il criterio (1.5) è soddisfatto, infatti si ha: $\int_{x_0}^{s} A(x)dx = s \sin^2 s + c_0$, ($c_0 =$ costante), e la condizione:

$$\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{t}{4} - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{8t}\cos 2t + c_0 + c_1 t^{-1}\right] = +\infty; \quad (c_0,\ c_1 \text{ costanti})$$

è ovviamente verificata.

Il criterio (1.7) è soddisfatto con $\varepsilon = 2$ (e quindi anche il criterio (1.6) che lo contiene come caso particolare).

Il criterio (1.8) non è invece applicabile, infatti (risultando, per $x \geq x_1$ abbastanza grande: $L_p'(x) > 0$, $x > 0$) si ha:

$$\int_{x_1}^{s} (AL_p - \frac{1}{4} L_p \sum_1^p{}_i [L_i]^{-2}) dx < \int_{x_1}^{s} A(x) L_p(x) dx = \int_{x_1}^{s} (\sin^2 x\, L_p + x \sin 2x\, L_p) dx <$$

$$< \int_{x_1}^{s} (\sin^2 x\, L_p + x \sin 2x\, L_p + x \sin^2 x\, L_p') dx = s \sin^2 s\, L_p(s) + \text{cost.}$$

Il limite, per $s \rightarrow +\infty$, di quest'ultima espressione non esiste, e quindi l'ipotesi (1.8) non può essere verificata.

3. - Sia $A(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$. I criteri (1.7), (1.8) sono soddisfatti assumendo rispettivamente $\varepsilon = 1/2$, $p = 0$. Il criterio (1.5) non è invece applicabile.

4. - Sia $A(x) = \dfrac{1}{x} \sin^2 x + \log x \sin 2x$, $(x_0 > 0)$. Il criterio (1.5) è soddisfatto, infatti, nel nostro caso, si ha: $\int_{x_0}^{s} A(x) dx = \log s \sin^2 s + c_0$ $(c_0 = \text{cost.})$, e la (1.5) diventa: $\lim\limits_{t \rightarrow +\infty} \left[\dfrac{1}{2} \log t - \dfrac{1}{4t} \log t \sin 2t + \right.$ $\left. + \dfrac{1}{4t} \int_{x_0}^{t} \dfrac{\sin 2s}{s} ds + c_0 + \dfrac{c_1}{t}\right] = +\infty$ $(c_0,\ c_1$ cost.) ed è pertanto verificata.

Il criterio (1.7) non è applicabile, infatti confrontiamo le due espressioni:

$$\int_{x_0}^{s} x^{1-\varepsilon} A(x) dx = \int_{x_0}^{s} (x^{-\varepsilon} \sin^2 x + x^{1-\varepsilon} \log x \sin 2x) dx;$$

$$\int_{x_0}^{s} (x^{-\varepsilon} \sin^2 x + x^{1-\varepsilon} \log x \sin 2x + (1-\varepsilon) x^{-\varepsilon} \log x \sin^2 x) dx =$$

$$= s^{1-\varepsilon} \log s \sin^2 s + c$$

$(c$ costante). Il limite, per $s \rightarrow +\infty$, della seconda espressione, se esiste, non può essere $+\infty$. Distinguiamo ora: se $\varepsilon = 1$ le due espressioni coincidono; se $\varepsilon < 1$ la funzione $(1-\varepsilon) x^{-\varepsilon} \log x \sin^2 x$ che, aggiunta nell'integrando della prima, fa ottenere la seconda è definitivamente positiva, e se invece $\varepsilon > 1$ essa è integrabile tra x_0 e $+\infty$. In ogni caso la (1.7) non può essere verificata.

Il criterio (1.8) non è applicabile, infatti (osservando che, per $x \geq x_1$ abbastanza grande, si ha $L_p(x) > 0$, $L_p'(x) > 0$, $\log x > 0$) possiamo scrivere:

$$\int_{x_1}^{s}\left(AL_p - \frac{1}{4}L_p\sum_1^p[L_i]^{-2}\right)dx < \int_{x_1}^{s} AL_p dx = \int_{x_1}^{s}\left(\frac{1}{x}\sin^2 x\, L_p + \log x \sin 2x\, L_p\right)dx <$$

$$< \int_{x_1}^{s}\left(\frac{1}{x}\sin^2 x\, L_p + \log x \sin 2x\, L_p + \log x \sin^2 x\, L_p'\right)dx =$$

$$= \log s \sin^2 s\, L_p(s) + \text{cost.}$$

Il limite, per $s \to +\infty$, di quest'ultima espressione non esiste, e quindi la (1.8) non può essere verificata.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ASCOLI. *Sul comportamento asintotico degli integrali....*, «Rend. Acc Naz. Lincei», (6), 22, (1935), 234-243, p. 241.

[2] W. B. FITE. *Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations*. «Trans. Amer. Math. Soc.», 19, (1918), 341-352, p. 347.

[3] P. HARTMAN, *On the linear logaritmo-exponential differential equations of the second order*, «Amer. J. of Math.», 70, (1948), 764-779, p. 778.

[4] — —, *On linear second order differential equations with small coefficients*, «Amer J. of Math.», 73. (1951). 955-962.

[5] — —, *On non-oscillatory linear differential equations of second order*, «Amer. J. of Math.», 74, (1952), 389-400.

[6] E. HILLE, *Non oscillations theorems*, «Trans. Amer. Math. Soc.». 64, (1948), 234-252, p. 249.

[7] A. KNESER, *Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen*, «Math. Ann. 42, (1893), 409-435.

[8] W. LEIGHTON, *The detection of the oscillation of solutions of a second order linear differential equation*, «Duke Math. J.» 17, (1950), 57-61.

[9] J. G. MIKUSINSKI, *On Fite's oscillation theorems*, «Colloquium math.», 2, (1949), 34-39.

[10] G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*. parte II., G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, Bologna, (1946), p. 347.

[11] A. WINTNER, *A criterion of oscillatory stability*, «Quart. Appl. Math.» 5, (1949), 115-117.

[12] M. ZLÀMAL, *Oscillation criterions*, «Časopis pro pěstování mat. a fys», roč 75, (1950), 213-218.