Bollettino
Unione Matematica Italiana

Antonio de Castro

Sopra l'equazione differenziale di risposta di un circuito elettrico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.2, p. 167–169.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_167_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Sopra l'equazione differenziale di risposta di un circuito elettrico.

Nota di ANTONIO DE CASTRO (a Madrid).

Sunto. - *Si completa un noto teorema di* S. LEFSCHETZ *(contenuto nelle sue* Lectures on differential equations) *sopra l'esistenza di soluzioni periodiche dell'equazione* $\ddot{x} + g'(x)\dot{x} + f(x) = e(t)$, *dimostrando l'unicità e la stabilità forte di questa soluzione nelle ipotesi complementari di essere* f(x) *crescente,* g'(x) *positiva.*

1. - S. LEFSCHETZ ha provato in modo semplice l'esistenza di almeno una soluzione periodica per l'equazione differenziale

$$(1)\qquad \ddot{x} + g'(x)\dot{x} + f(x) = e(t)\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},\ g'(x) = \frac{dg}{dx}\right)$$

che generalizza l'equazione di risposta di un circuito elettrico con resistenza R, capacità C (costanti) e un induttore con curva di saturazione $i = h(\varphi)$. In questo caso è in (1)

$$f(x) = h(x)/C, \qquad g(x) = Rh(x),$$

dove $h(x)$ può rappresentarsi con un polinomio dispari e tale che sia $xh(x) > 0$.

Le condizioni imposte da LEFSCHETZ sono:

I. *Esistenza delle derivate* $\dot{e}(t)$, $f'(x)$, $g'(x)$ *per tutti i valori delle variabili.* (Queste condizioni garantiscono l'esistenza e l'unicità delle soluzioni, possono però, come indica l'Autore, sostituirsi per altre meno restrittive).

II. $e(t)$ *è periodica col periodo* T.

III. $f(x)/x$ *tende verso* ∞ *con* $|x|$.

IV. *Esistono due costanti positive* b, B, *tali che sia*

$$|g(x) - bf(x)| \leq B|x|.$$

Ma l'esistenza di una soluzione periodica ha interesse fisico principalmente se si tratta di una soluzione stabile. In questa Nota noi dimostriamo come segue l'unicità e la stabilità forte della soluzione periodica se si suppone inoltre che $f(x)$ e $g(x)$ siano crescenti. E lo stesso metodo si applica anche a equazioni più generali.

2. Dimostreremo che, nelle ipotesi indicate, una qualunque soluzione di (1) tende verso la soluzione periodica, l'esistenza della quale è dimostrata da LEFSCHETZ.

Per questo sostituiamo (1) con il sistema equivalente

$$\dot{x} + g(x) = y, \qquad \dot{y} + f(x) = e(t); \tag{2}$$

e consideriamo due soluzioni distinte che rappresentiamo con $[x_1(t), y_1(t)]$, $[x_2(t), y_2(t)]$ e chiameremo loro distanza la funzione $D(t)$ definita da

$$D^2(t) = 2\int^{t} [f(x_2) - f(x_1)](\dot{x}_2 - \dot{x}_1)dt + (y_2 - y_1)^2.$$

Segue per derivazione che è

$$D(t)\dot{D}(t) = [f(x_2) - f(x_1)](\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

e per tanto, ricordando (2) rimane

$$D(t)\dot{D}(t)=[f(x_2)-f(x_1)][y_2-y_1-g(x_2)+g(x_1)]-(y_2-y_1)[f(x_2)-f(x_1)]=$$
$$=-[f(x_2)-f(x_1)][g(x_2)-g(x_1)].$$

Per tanto sarà $\dot{D}(t)<0$, e da qua segue, essendo $\dot{D}(t)$ una funzione continua, che $D(t)$ è una funzione decrescente qualunque siano le due soluzioni di partenza, e perciò

$$\lim_{t\to\infty} D(t)=A\geq 0.$$

Dimostreremo che, se una delle due soluzioni è periodica, il limite precedente non può essere diverso da zero; per questo applicheremo un ragionamento dovuto a N. LEVINSON.

Sia $[\bar{x}(t),\ \bar{y}(t)]$ la soluzione periodica; il suo periodo sarà evidentemente multiplo di T, per esempio T_1; supponiamo che una altra soluzione di (2), $[x_0(t),\ y_0(t)]$ non tenda verso quella, e sia $D_0(t)$ la distanza fra le due. Sarà $\lim D_0(t)=A>0$. Se chiamiamo $D_n(t)$ la distanza fra $[\bar{x}(t),\ \bar{y}(t)]$ e $[x_0(t+nT_1),\ y_0(t+nT_1)]$ sarà

$$D_n(t)=D_0(t+nT_1)$$

e perciò

$$\lim_{n\to\infty} D_n(t)=A.$$

Segue che, se P_n indica il punto $[x_0(nT_1),\ y_0(nT_1)]$ e $\bar{P}$ il punto $[\bar{x}(0),\ \bar{y}(0)]$, la distanza $\overline{P_n\bar{P}}$ tenderà verso A. Per tanto i punti P_n hanno almeno un punto limite. Sia Q uno di questi e $[x(t),\ y(t)]$ la soluzione che passa per Q per $t=0$. Indicando con $D(t)$ la distanza fra $[\bar{x}(t),\ \bar{y}(t)]$ e $[x(t),\ y(t)]$, non essendo $D(t)=$ costante (questo sarebbe in contraddizione colla condizione prima ottenuta $\dot{D}(t)<0$) sarà $\lim D(t)=A_1<A$. Ma allora, siccome $A-A_1$ sarà un numero positivo fisso, e si può scegliere la distanza iniziale $\overline{P_nQ}$ arbitrariamente piccola, avremo una contraddizione colla continuità delle soluzioni dell'equazione rispetto alle condizioni iniziali. L'assurdo segue dal supporre $A>0$.

Si dimostra adesso subito che $T_1=T$. Infatti, se fosse $T_1\neq T$ avremmo una soluzione $[\bar{x}(t-T),\ \bar{y}(t-T)]$ che non tende verso $[\bar{x}(t),\ \bar{y}(t)]$ quando $t\to\infty$, in contraddizione con il teorema sopra dimotrato.

BIBLIOGRAFIA

S. LEFSCHETZ, *Lectures on differential equations.* Princeton, 1948 (204-209).

N. LEVINSON, *On a non-linear differential equation of the second order,* « Journ. of Math. and Phys. » V. 22 (1943) (181-187).