Bollettino
Unione Matematica Italiana

Antonio Zitarosa

Sulla relazione tra il tipo ed il rango di un gruppo finito.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.2, p. 164–167.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_164_0>

Sulla relazione tra il tipo ed il rango di un gruppo finito.

Nota di ANTONIO ZITAROSA (a Napoli)

Sunto. - *Si dimostra che:* a) *il tipo* τ *ed il rango* ρ *di un gruppo finito sono legati dalla relazione:* $\tau + 2 \geq 2^{\rho+1} + \rho - 1$, *se* $\rho \geq 2$; b) *per ogni* ρ *esistono gruppi per i quali risulta:* $\tau + 2 = 3(2^{\rho} - 1)$.

1. Nella teoria dei sottogruppi fondamentali di un gruppo, introdotta da M. CIPOLLA (1), e poi rielaborata da G. SCORZA (2), sorge la questione di determinare la relazione tra il tipo τ ed il rango ρ di un gruppo. A tale questione sono dedicate alcune ricerche dello stesso SCORZA (3) e di G. ZAPPA (4).

L'ultima diseguaglianza dello ZAPPA (5), relativa ad un gruppo finito. è la seguente:

$$\tau + 2 \geq 2^{\rho+1} - 1, \tag{1}$$

che limita inferiormente τ mediante una funzione di ρ di tipo esponenziale, mentre le diseguaglianze precedentemente ottenute introducevano una funzione lineare di ρ.

Peraltro, la (1) non è definitiva, come avverte — nel lavoro citato in (5) — lo stesso ZAPPA, manifestando inoltre l'opinione che sussista la formula:

$$\tau + 2 \geq 3(2^{\rho} - 1), \tag{2}$$

e che per ogni ρ esistano gruppi per cui si ha proprio:

$$\tau + 2 = 3(2^{\rho} - 1). \tag{3}$$

Nella presente nota si consegue (n. 2) un miglioramento della

(1) M. CIPOLLA, *Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito*, Rend. Acc. Sc. Napoli, serie 3ª: vol. XV (1909), pag. 44-54, 113-124; vol. XVII (1911), pag 226-232; vol. XVIII (1912), pag. 29-35.

(2) G. SCORZA, *Gruppi astratti*, Ediz. Cremonese, Roma (1942), cap. IV.

(3) G. SCORZA, *Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo*, Rend. Acc. Lincei, Roma, serie 6ª, vol. VI (1927), pag. 361-365; 441-445; *Maggiore determinazione della relazione intercedente tra il rango e il tipo di un gruppo*, ibid., serie 6ª, vol. VIII (1928), pag. 173-178.

(4) G. ZAPPA, a) *Sulla relazione tra il rango e il tipo di un gruppo*, Rend. R. Accad. Italia, Roma, serie 7ª, vol. II (1941), pag. 571-585; b) *Miglioramento della diseguaglianza tra il rango e il tipo di un gruppo finito*, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova, vol. XIII (1942), pag. 36-40.

(5) Nota b) cit. in (4).

(1), dimostrando che

$$\tau + 2 \geq 2^{\rho+1} + \rho - 1 \tag{4}$$

se $\rho \geq 2$; ed inoltre si dimostra (n. 3), per ogni ρ, l'esistenza di gruppi per cui vale la (3) (oltre che, naturalmente, di gruppi per cui vale la (2) col $>$).

Resta insoluta la questione della validità della (2).

2. Sia H un gruppo finito (non abeliano) di tipo τ e rango ρ, con $\rho \geq 2$. Ci proponiamo di dimostrare la (4).

Intanto osserviamo che per $\rho = 2$ la (4) è subito verificata, perchè allora essa si riduce a: $\tau \geq 7$, il che è noto (6). Inoltre, in virtù di un teorema di V. Amato (7), l'ordine di un gruppo di rango 3 è ≥ 96, e quindi la (4) è verificata per tutti i gruppi (non abeliani) di ordine < 96 e rango $\neq 1$.

Ciò premesso, dimostreremo la (4) per induzione rispetto all'ordine del gruppo, supponendo naturalmente $\rho \geq 3$.

Il gruppo H, essendo di rango ρ, conterrà (propriamente) un sottogruppo fondamentale G_ρ di genere ρ, che non sarà abeliano perchè $\rho > 1$, e di cui diremo τ' e ρ' tipo e rango.

Poichè è subito visto che $\rho' \geq \rho - 1$, risulta $\rho' \geq 2$, e quindi — per l'ipotesi messa a base della nostra induzione — è:

$$\tau' + 2 \geq 2^{\rho'+1} + \rho' - 1,$$

donde segue:

$$\tau' + 2 \geq 2^{\rho} + \rho - 2. \tag{5}$$

Ora, la differenza $\tau - \tau'$ darebbe il numero dei sistemi fondamentali di H non contenuti in G_ρ se ogni sistema fondamentale di G_ρ fosse anche sistema fondamentale di H; ma un sistema fondamentale di G_ρ o è un sistema fondamentale di H, o è somma di più sistemi fondamentali di H, e questa seconda eventualità accade per es. per il centro di G_ρ, che è somma del centro di H e del sistema fondamentale di H omologo a G_ρ. Pertanto, $\tau - \tau' - 1$ è non minore del numero dei sistemi fondamentali di H non contenuti in G_ρ; d'altra parte, G. Zappa (8) ha dimostrato che tale

(6) V. Amato, *Sul tipo minimo dei gruppi di rango* 2, Rend. Accad. Sc. Napoli, serie 3ª, vol. XXIV (1918), pag. 136-144.

(7) « Un gruppo di rango ρ è almeno dell'ordine $2^{2\rho-1} \cdot 3$ » in: V. Amato, *Sui gruppi di rango 2 d'ordine minimo*, Rend. Accad. Sc. Napoli, serie 3ª, vol. XXIV (1918), pag. 121-131; n. 1.

(8) Nota b) cit. in (4), n. 4.

numero è $\geq 2^\rho$. Avremo quindi:

$$(6)\qquad \tau - \tau' \geq 2^\rho + 1.$$

E la (4) seguirà dalle (5) e (6).

3. In una nota di alcuni anni fa, S. AMANTE ha determinato i sottogruppi fondamentali ed il tipo di alcuni gruppi quasi-abeliani ([9]).

Di tali gruppi determineremo il rango, servendoci di alcuni risultati dell'AMANTE, la cui nota indicheremo con A.

Si tratta dei gruppi generati da due elementi a e b mediante le relazioni:

$$(7)\qquad b^{p^m} = 1,\ a^{p^n} = b^{p^s},\ a^{-1}ba = b^{1+px} \qquad (p \text{ primo}),$$

con m, n, s, x interi positivi tali che $s \leq m$, $x = kp^r$ (k primo con p), $s + r + 1 \geq m$, $r \geq 0$ se p è dispari, $r \geq 1$ se $p = 2$, $n + r + 1 \geq m$.

Le (7) definiscono effettivamente un gruppo G di ordine p^{n+m}.

Sono noti i seguenti risultati:

(I) Se diciamo $G_{u,v}$ il sottogruppo fondamentale omologo all'elemento $a^u b^v$, facendo variare u e v fra i limiti 1 e $p^{m-(r+1)}$ si ottengono tutti i sottogruppi fondamentali distinti di G, risultando $G_{u,v} = G$ per $u = v = p^{m-(r+1)}$ (A., pag. 25).

(II) Posto $u = lp^\nu$, $v = l'p^{\nu'}$, l ed l' primi con p, ν e $\nu' \geq 0$ e $\leq m - (r + 1)$, $G_{u,v}$ ha ordine $p^{n+r+\nu+1}/\theta$, ove $\theta = 1$ oppure $p^{\nu-\nu'}$ secondo che $\nu \leq \nu'$ oppure $\nu > \nu'$ (A., pag. 27-28).

(III) Il sottogruppo fondamentale omologo all'elemento $b^{p^{\nu'}}$ è generato dagli elementi $a^{p^{m-(r+1)-\nu'}}$, b ed ha l'ordine $p^{n+r+1+\nu'}$ (A., pag. 31).

(IV) Il tipo di G è dato da:

$$(8)\qquad \tau = \frac{p^{m-r} + p^{m-(r+1)} - (p+1)}{p-1} - 2 = \frac{p+1}{p-1}(p^{m-(r+1)} - 1) - 2 =$$
$$= (p+1)(p^{m-(r+2)} + p^{m-(r+3)} + \ldots + p + 1) - 2.$$

(A., pag. 34).

([9]) S. AMANTE, *I sottogruppi fondamentali di gruppi quasi-abeliani*, Le Matematiche, Catania, vol. del 1949, pag. 21-36. I gruppi quasi-abeliani, così chiamati da G. ZAPPA, e detti invece quasi-hamiltoniani da K JWASAWA, che per primo li ha studiati, sono caratterizzati dalla proprietà di avere due qualsiansi sottogruppi permutabili fra loro; v. K. JWASAWA, *Ueber die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, vol. 4 (1941), pag. 171-199; G. ZAPPA, *Gruppi quasi-abeliani*, Acta Pontif. Acad. Sc., vol. VI (1942), n. 29 e n. 32.

Faremo ora vedere che il rango di G è dato da:

$$\rho = m - (r + 1). \tag{9}$$

Infatti, facendo variare ν' da 0 a $m - (r + 1)$, il sottogruppo fondamentale omologo all'elemento $b^{p^{\nu'}}$ descrive, per (III), una catena di $m - r$ sottogruppi fondamentali, ciascuno contenuto propriamente nel successivo, che termina con il gruppo G. Risulta quindi: $\rho \geq m - (r + 1)$.

Ma non può essere $\rho > m - (r + 1)$. Infatti, da (II) segue che l'ordine di un sottogruppo fondamentale è $\geq p^{n+r+1}$, e pertanto una catena di sottogruppi fondamentali proprî, ciascuno contenuto propriamente nel successivo, sarà formata al massimo da $m - (r + 1)$ elementi. (Si ricordi che G ha ordine p^{n+m}).

Resta cosi dimostrata la (9).

Per ogni gruppo G, determineremo ora la relazione tra τ e ρ.

Nel caso $p = 2$, la (8) dà:

$$\tau + 2 = 3(2^{m-(r+1)} - 1) = 3(2^{\rho} - 1).$$

Esistono cioè, per ogni ρ, dei gruppi per i quali risulta verificata la relazione (3).

Osserviamo ancora che l'ultimo membro della (8) cresce al crescere di p, pertanto si può concludere che per $p \neq 2$ risulta:

$$\tau + 2 > 3\,(2^{\rho} - 1).$$

E così per ogni ρ abbiamo individuato dei gruppi per i quali è verificata col segno $>$ la relazione (2).