Bollettino Unione Matematica Italiana

Umberto Gasapina

Su una proprietà metrica delle flessioni delle superficie sviluppabili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.2, p. 160–163.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_160_0>

Su una proprietà metrica delle flessioni delle superficie sviluppabili.

Nota di UMBERTO GASAPINA (a Milano) [1]

Sunto. - *Si dimostra che ogni doppia infinità di sfere σ, nella quale le sfere σ passano per un punto e hanno i centri distribuiti su una superficie S sviluppabile, ammette una deformazione continua per pura flessione di S, nel corso della quale le σ risultano ortogonali a una stessa sfera il cui raggio varia con la deformazione.*

Sia (S, R) una congruenza (doppia infinità) di sfere $\sigma(u, v)$ aventi il centro $C(u, v)$ sulla superficie S e il raggio $R = R(u, v)$: consideriamo le deformazioni della congruenza ottenute per flessione (al modo di GAUSS) della superficie S, conservando immutato il raggio R. Può avvenire che esista una deformazione (S_a, R) della congruenza (S, R) tale che ogni sfera $\sigma(u, v)$ risulti ortogonale alla sfera Σ_a $(x^2 + y^2 + z^2 = a^2)$ di raggio a.

Poniamoci il problema: esistono congruenze di sfere (S, R) tali che, per ogni a, si possano deformare in (S_a, R) con le σ ortogonali alla sfera Σ_a? La risposta è fornita dal seguente

TEOREMA I. – Tutte e sole le congruenze di sfere (S, R) che, per qualunque a, sono deformabili in (S_a, R) con le σ ortogonali alla sfera Σ_a sono quelle nelle quali la superficie S dei centri è sviluppabile e si può deformare in guisa che le sfere σ passino per uno stesso punto; cioè sono quelle in cui S è sviluppabile e R soddisfa alla seconda equazione dell'applicabilità [2] che, essendo la curvatura totale nulla, si riduce a

$$\Delta_{22}\left(\frac{R^2}{2}\right) + 1 = \Delta_2\left(\frac{R^2}{2}\right). \tag{1}$$

I parametri differenziali di R sono calcolati rispetto alla forma fondamentale

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

della superficie S dei centri.

OSSERVAZIONE. – Ogni congruenza (S, R) di sfere σ con S sviluppabile e le σ passanti per un punto, può deformarsi in guisa da mantenere le sfere σ ortogonali ad una stessa sfera il cui raggio varia con la deformazione.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Matematico della Università di Milano.

(2) Ved. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3 ed., Zanichelli editore, Vol. II, parte I, pag. 99.

Come si possono caratterizzare le congruenze (S, R) che rispondono al problema precedente, cioè con S sviluppabile e deformabile in guisa che le sfere σ passino per un punto? Sussiste il seguente

TEOREMA II. - Tutte e sole le congruenze di sfere (S, R) con la superficie S dei centri sviluppabile non piana e le sfere σ passanti per un punto sono caratterizzate dalla proprietà che stendendo S su un piano le due falde dell'inviluppo risultano due linee distinte (necessariamente simmetriche rispetto al piano). Una di tali linee viene descritta da quel punto rigidamente connesso alla sviluppabile S che rotola (senza strisciare) sul piano. Fa eccezione il caso in cui S è un cono e le sfere σ passano pel suo vertice.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA I. - Se le tre quantità

$$(2) \qquad RR_{11} + R_u^2 - E, \qquad RR_{12} + R_u R_v - F, \qquad RR_{22} + R_v^2 - G$$

sono tutte identicamente nulle, la funzione $R(u, v)$ soddisfa alla equazione (1) (come facilmente si verifica) e questo annullarsi esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè le falde dell'inviluppo della congruenza permangano linee in ogni flessione di S; in questo caso S è sviluppabile e quando S si stende su un piano S_0 tutte le sfere σ vengono a passare per due punti A e B simmetrici rispetto al piano stesso ([3]). In questo caso speciale la congruenza (S_0, R) è costituita da una rete di sfere $\sigma(u, v)$ e, considerando il fascio ad essa ortogonale, si vede che esistono infinite sfere (quelle del fascio) aventi i centri sulla retta AB ortogonali a tutte le sfere σ. Pertanto non occorre deformare il piano S_0, ma solo spostarlo per traslazione al fine di rendere le sfere σ ortogonali a Σ_a ([4]).

Escludiamo questo caso speciale. Essendo σ ortogonale a Σ_a risulta

$$R^2 + a^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (x, y, z \text{ centro di } \sigma)$$

e quindi $R^2 + a^2$ soddisfa alla seconda equazione dell'applicabilità che si scrive

$$\Delta_{22}\left(\frac{R^2 + a^2}{2}\right) + 1 = \Delta_2\left(\frac{R^2 + a^2}{2}\right) + K\left[R^2 + a^2 - \Delta_1\left(\frac{R^2 + a^2}{2}\right)\right]$$

([3]) Ved. G. RICCI, *Sulla deformazione delle doppie infinità di sfere per flessione della superficie dei centri*, « Atti del Reale Istituto Veneto di scienze e lettere ed arti », Tomo XCIII, pagg. 153:-1556, in particolare pag. 1539.

([4]) Questo vale anche nel caso in cui A e B coincidono in un punto di S_0 e il fascio ortogonale di sfere risulta un fascio parabolico.

cioè

$$\Delta_{22}\left(\frac{R^2}{2}\right)+1=\Delta_2\left(\frac{R^2}{2}\right)+K\left[R^2+a^2-\Delta_1\left(\frac{R^2}{2}\right)\right].$$

Le congruenze (S, R) che rispondono al problema sono tutte e solo quelle nelle quali questa equazione è verificata per ogni valore di a e quindi dovrà essere necessariamente $K=0$, cioè S sviluppabile.

Inversamente se S è sviluppabile e R soluzione dell'equazione

$$\Delta_{22}\left(\frac{R^2}{2}\right)+1=\Delta_2\left(\frac{R^2}{2}\right)$$

(S, R) può deformarsi in (S_0, R) tale che le sfere vengano a passare per l'origine: i coefficienti della seconda forma fondamentale $Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2$ della superficie S_0 dei centri risultano [5]

$$D_0=\frac{RR_{11}+R_u^2-E}{R\sqrt{1-\Delta_1 R}},\qquad D'_0+\frac{RR_{12}+R_uR_v-F}{R\sqrt{1-\Delta_1 R}},$$
$$D''_0=\frac{RR_{22}+R_v^2-G}{R\sqrt{1-\Delta_1 R}}$$

e non sono identicamente nulli.

La configurazione (S_a, R) è assegnata con gli analoghi coefficienti della seconda forma fondamentale della superficie S_a

$$D_a=\frac{RR_{11}+R_u^2-E}{\sqrt{R^2+a^2-R^2\Delta_1 R}},\qquad D'_a=\frac{RR_{12}+R_uR_v-F}{\sqrt{R^2+a^2-R^2\Delta_1 R}},$$
$$D''_a=\frac{RR_{22}+R_v^2-G}{\sqrt{R^2+a^2\cdot R^2\Delta_1 R}}$$

che risultano funzioni continue di a e variabili con a.

Dimostrazione del Teorema II. – Le due falde Σ e $\overline{\Sigma}$ dell'inviluppo di (S, R) siano distinte, cioè sia $1-\Delta_1 R\neq 0$ [6]; il quadrato del loro elemento lineare sia rispettivamente

$$E'du^2+2F'dudv+G'dv^2,$$
$$\overline{E}'du^2+2\overline{F}'dudv+\overline{G}'dv^2;$$

i discriminanti risultano rispettivamente [7]

$$E'G'-F'^2=(EG-F^2)(1-\Delta_1 R)(1+RH_0+R^2K_0)^2$$
$$\overline{E}'\overline{G}'-\overline{F}'^2=(EG-F^2)(1-\Delta_1 R)(1+R\overline{H}_0+R^2\overline{K}_0)^2$$

(5) Ved. L. Bianchi, loc. cit. Vol. I, parte I, pag. 360.
(6) Ved. L. Bianchi, loc. cit. Vol. II, parte I, pag. 94.
(7) Ved. G. Ricci, loc. cit. pag. 1541.

dove

$$H_0 = A - \omega\mu, \qquad K_0 = B + \omega\nu, \qquad \omega = \frac{1}{(EG - F^2)\sqrt{1 - \Delta_1 R}},$$

$$A = -\frac{\Delta_2 R}{1 - \Delta_1 R} + \frac{R_v^2 R_{11} - 2R_u R_v R_{12} + R_v^2 R_{22}}{(EG - F^2)(1 - \Delta_1 R)},$$

$$B = \frac{\Delta_{22} R}{1 - \Delta_1 R} + K,$$

$$\mu = 2(F - R_u R_v)D' - (E - R_u^2)D'' - (G - R_v^2)D,$$

$$\nu = 2R_{12}D' - R_{11}D'' - R_{22}D.$$

$\overline{H}_0$ e $\overline{K}_0$ si ottengono da H_0 e K_0 cambiando ω in $-\omega$.

Le due falde dell'inviluppo di (S, R) sono linee distinte se e soltanto se $1 - \Delta_1 R \neq 0$ e le due espressioni

$$1 + RH_0 + R^2 K_0, \qquad 1 + R\overline{H}_0 + R^2 \overline{K}_0$$

sono contemporaneamente nulle. Questo accade se

$$1 + RA + R^2 B = 0, \qquad \mu - R\nu = 0$$

ossia se

$$(3) \quad \begin{cases} R^2 \Delta_{22} R - R\Delta_2 R + R \cdot \dfrac{R_v^2 R_{11} - 2R_u R_v R_{12} + R_u^2 R_{22}}{EG - F^2} = \\ \qquad\qquad\qquad = (1 - \Delta_1 R)(-KR^2 - 1) \\ (RR_{11} + R_u^2 - E)D'' - 2(RR_{12} + R_u R_v - F)D' + (RR_{22} + R_v - G)D = 0. \end{cases}$$

La prima delle (3) diviene la seconda equazione dell'applicabilità quando in luogo di $-K$ si metta K. Pertanto, quando la superficie S dei centri è sviluppabile, le congruenze di sfere considerate appartengono alla classe di congruenze per le quali esiste una flessione della superficie S dopo di che tutte le sfere vengono a passare per uno stesso punto. La seconda delle (3) è verificata se S è un piano.

Le due falde Σ e $\overline{\Sigma}$ dell'inviluppo di (S, R) siano coincidenti, cioè sia $1 - \Delta_1 R = 0$. Se esiste una configurazione S_0 di S per la quale le sfere σ vengono a passare per uno stesso punto O, le linee $R =$ cost. (geodeticamente parallele su S, R arco di geodetica) sono sferiche di centro O e le geodetiche ad esse ortogonali sono necessariamente rettilinee; ne segue che S_0 è un cono di vertice O (eventualmente un piano riferito a un sistema polare). In questo caso le due linee Σ e $\overline{\Sigma}$ si contraggono in un punto del piano.