Bollettino Unione Matematica Italiana

Tristano Manacorda

Sopra un principio variazionale di E. Reissner per la statica dei mezzi continui.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.2, p. 154–159.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_154_0>

Sopra un principio variazionale di E. Reissner per la statica dei mezzi continui.

Nota di TRISTANO MANACORDA (a Firenze)

Sunto. *Si estende alle deformazioni finite un principio variazionale di* E. REISSNER *per la statica dei mezzi continui, e si fanno alcune considerazioni sul legame generale deformazione-sforzi.*

1. – In una nota di pochi anni fa (1) E. REISSNER ha dimostrato una relazione variazionale per la statica dei mezzi elastici soggetti a deformazione infinitesima, la quale, in un certo senso, congloba il classico principio della minima energia potenziale e il teorema di MENABREA.

Il principio di REISSNER può così enunciarsi. Sia S un sistema continuo elastico, soggetto a deformazioni infinitesime, η la omografia linearizzata di deformazione, le cui componenti rispetto ad una terna cartesiana fissa sono espresse, in funzione delle componenti u_r dello spostamento s dei punti P di S, da $\eta_{rs} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r}\right]$, e β l'omografia degli sforzi, e si formi la funzione

$$F = I_1[\eta \cdot \beta] - W, \tag{1,1}$$

W funzione solo delle componenti X_{rs} di β.

Indichi infine f la forza superficiale (per unità di superficie) agente sul contorno completo σ di S. Allora, fra tutti i possibili stati di tensione e gli spostamenti, quelli effettivi, che soddisfano cioè alle equazioni indefinite della statica ed alle condizioni al contorno, e per i quali inoltre $\frac{\partial W}{\partial X_{rs}} = \eta_{rs}$, sono determinati dalla equazione variazionale

$$\delta \left\{ \int_S F dS + \int_\sigma f \times s d\sigma \right\} = 0. \tag{1,2}$$

Nella presente nota si riprende la questione, estendendo il teorema di REISSNER (e in forma un poco più generale di quella enunciata sopra) ai mezzi continui più generali soggetti a deformazioni finite per le quali esiste una energia di deformazione. In

(1) F. REISSNER, *On a variational theorem in elasticity*, « J. of. Math. a. Phy. », 29 (1950), pp. 90-95.

tutto ciò è essenziale la teoria delle deformazioni finite dei continui, sviluppata da A. SIGNORINI [2], e la considerazione della « seconda energia di deformazione » la cui introduzione nella meccanica è dovuta a B. FINZI [3]. La nota termina con alcune considerazioni sulla forma più generale della relazione che permette di esprimere la deformazione in funzione degli sforzi nel caso considerato, di deformazioni finite per le quali esiste una energia di deformazione. Si viene così a ritrovare, nel particolare caso di deformazioni infinitesime, una relazione deformazioni–sforzi stabilita per tutt'altra via da *W.* PRAGER, valida però nelle ipotesi da lui adottate, anche nel caso di deformazioni per le quali non esiste una energia di deformazione. Il risultato qui conseguito sembra avere qualche importanza nella teoria matematica della plasticità.

2. - Sia S un sistema continuo soggetto a trasformazioni regolari, e C_* indichi una sua configurazione che verrà assunta come di riferimento, mentre C sia un'altra configurazione di S. Se P_* è un punto di C_* e P il corrispondente di P_* nella trasformazione $C_* \to C$, indichiamo, com'è abituale, con $\alpha = dP/dP_*$ l'omografia di trasformazione, con $s = P - P_*$ lo spostamento, infine con β l'ordinaria omografia degli sforzi nella configurazione C. Ponendo

$$(2,1) \qquad \varkappa = \beta R\varkappa = I_3\alpha \cdot \beta \cdot K\alpha^{-1}$$

$\varkappa$ è l'omografia di KIRCHHOFF relativa al sistema nella configurazione C ed alla trasformazione considerata. In assenza di forze di massa, e se f indica la forza superficiale agente sull'unità di superficie del contorno σ di C, alle equazioni indefinite di equilibrio ed alle equazioni al contorno può darsi la forma lagrangiana

$$(2,2) \qquad \begin{aligned} \operatorname{grad}_{P_*}\varkappa &= 0 \ldots C_* \\ \varkappa\nu_* &= 0 \ldots \sigma_* \end{aligned}$$

dove: σ_* è il contorno completo di C_*; ν_* è la normale interna

([2]) Cfr. ad es.: A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, « Ann. Mat. Pura Appl. », (4), **22**, (1943), 33-143; (4), **30**, (1949), 1-72.

([3]) B. FINZI, *Principio variazionale nella meccanica dei continui*, « Rend. Acc. d'Italia », (7) **1** (1940), pp. 412-417.

Cfr. anche B. FINZI - M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni* (Bologna, 1949), pp. 297-299.

a C^* nei punti di σ_*; ed infine f_* è « l'immagine » su σ_* di f.

$$f_* = f[1 + \delta_\sigma], \tag{2,3}$$

con δ_σ coefficiente di dilatazione areale nella trasformazione $C_* \rightarrow C$ (4).

Sia poi δl_i il lavoro per unità di volume di C_*, compiuto dalle forze intime per uno spostamento infinitesimo δs dei punti P di C. Se esiste una energia di deformazione, δl_i è un differenziale esatto e può porsi

$$I_1\left[K\frac{d\delta s}{dP_*}\varkappa\right] = \delta l_i = -\,dw. \tag{2,4}$$

In tal caso, anche l'espressione differenziale $I_1\ [K(\alpha - 1)\delta\varkappa]$ risulta una espressione differenziale esatta, e ponendo

$$I_1[K(\alpha - 1)\delta\varkappa] = -\,\delta\varphi, \tag{2,5}$$

φ risulta funzione (oltre che di P_* e della temperatura) delle caratteristiche di $\varkappa$ e rappresenta la « seconda energia di deformazione ».

3. - Ciò premesso, si consideri la funzione, delle componenti di α e di $\varkappa$ rispetto ad una terna di riferimento fissa,

$$F = I_1[K(\alpha - 1)\cdot\varkappa] + \varphi, \tag{3,1}$$

in cui φ è una funzione delle sole componenti di $\varkappa$.

Si può allore dimostrare il teorema: *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'omografia* $\varkappa$ *che figura nella* (3,1) *soddisfi alle equazioni* (2,2) *relative ad una configurazione* C *di* S *in cui* α *è la omografia di trasformazione, e che inoltre esista una energia di deformazione, è che, per ogni variazione arbitraria* $\delta\varkappa$ *di* $\varkappa$ *e per ogni spostamento virtuale infinitesimo* δs *a partire dalla configurazione* C *e che lasci inalterati i vettori* $\mathbf{f}_*$, *valga la relazione*

$$\delta I = \delta\left\{\int_{C_*} F dC_* + \int_{\sigma_*} f_* \times s\, d\sigma_*\right\} = 0. \tag{3,2}$$

In tal caso, la funzione φ *che figura nella* (3,1) *coincide con la seconda energia di deformazione relativa al sistema di* S *nella configurazione* C.

(4) Cfr. A. SIGNORINI, *Lezioni di Fisica matematica*, (Roma, 1953), cap. II.

La condizione è necessaria. Sia infatti S in equilibrio nella configurazione C cui compete l'omografia di KIRCHHOFF $\varkappa$ e l'omografia di trasformazione α, e supponiamo che esista una energia di deformazione di modo che il lavoro elementare compiuto dalle forze intime per uno spostamento infinitesimo a partire da C sia un differenziale esatto.

Come è ben noto, allora le (2,2) equivalgono all'equazione scalare

$$\delta L_i + \delta L_f = 0, \tag{3,3}$$

in cui δL_i indica il lavoro complessivo delle forze intime, $\delta L_i = \int_{C_*} \delta l_i dC_*$ e δL_f quello delle forze di superficie, $\delta L_f = \int_{\sigma_*} f_* \times \delta s d\sigma_*$. Inoltre vale (2,4) per cui esiste una seconda energia di deformazione che facciamo coincidere con la funzione φ nella (3,1). Questa medesima (3,1) ora si scrive

$$\delta I = \int_{C_*} \{ I_1[K(\alpha - 1)\delta\varkappa] + \delta\varphi \} dC_* + \delta L_i + \delta L_f \tag{3,4}$$

che risulta dunque nelle nostre ipotesi, nulla per ogni $\delta\varkappa$ e δs.

Viceversa, siano $\varkappa$ ed $s(P_*)$ una omografia ed un campo vettoriale dati ad arbitrio, e φ una funzione scalare delle caratteristiche di $\varkappa$

Posto $\alpha = \dfrac{ds}{dP_*} + 1$ si formi l'espressione (3,1). Mostriamo allora che fra tutte le omografie $\varkappa$ e α, in corrispondenza ad ogni funzione φ, quelle per le quali $\delta I = 0$ identicamente nel senso sopra indicato sono tali da soddisfare le (2,2) e (2,5), e possono perciò interpretarsi come omografia di KIRCHHOFF di un sistema S nella configurazione C corrispondente all'omografia di trasformazione α, mentre φ viene ad assumere il significato di seconda energia di deformazione.

La (3,1) infatti si scrive

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{C^*} \{ I_1[K(\alpha - 1)\delta\varkappa] + \delta\varphi \} dC_* + \\ + \int_{C_*} I_1 \left[K \frac{d\delta s}{dP_*} \varkappa \right] dC_* + \int_{\sigma_*} f_* \times \delta s d\sigma_* = 0, \end{aligned} \tag{3,5}$$

e in conseguenza della arbitrarietà ed indipendenza di $\delta\varkappa$ e di δs, equivale alle due equazioni

$$\delta L_i + \delta L_f = 0, \qquad I_1[K(\alpha - 1)\delta\varkappa] = -\delta\varphi, \tag{3,6}$$

e perciò contemporaneamente alle (2,2) e (2,5).

4. - Vogliamo qui osservare una semplice e immediata ma interessante conseguenza della introduzione della seconda energia di deformazione. Se indichiamo per semplicità con $a_{r,s}$, $r, s = 1, 2, 3$, le componenti di $\alpha - 1 = \frac{ds}{dP_*}$ rispetto ad una terna di riferimento prefissata, con $K_{r,s}$ le analoghe componenti di $\varkappa$, la (2,5) porta immediatamente alle relazioni:

$$a_{rs} = -\frac{\partial\varphi}{\partial K_{rs}} \qquad r, s = 1, 2, 3, \tag{4,1}$$

che permettono di esprimere per ogni sistema soggetto a trasformazioni per le quali esiste una energia di deformazione, le caratteristiche di trasformazione mediante le componenti di $\varkappa$. Le (4,1) invertono in un certo senso, le ben note espressioni delle componenti dell'omografia lagrangiana degli sforzi in funzione delle caratteristiche di deformazione [5].

Supponiamo in particolare che il sistema S sia isotropo nella configurazione di riferimento, il che equivale al fatto che φ può dipendere da $\varkappa$ solo per il tramite dei tre suoi invarianti.

Conviene per i nostri scopi introdurre, al posto degli usuali tre invarianti di $\varkappa$, i tre invarianti, ad essi legati in modo biunivoco, dati da

$$K_1 = \frac{1}{3} I_1\varkappa, \qquad K_2 = \frac{1}{2} Q, \qquad K_3 = \frac{1}{3} C, \tag{4,2}$$

dove Q e C sono rispettivamente il primo invariante quadratico e il primo invariante cubico di $\varkappa$ [6]. Dopo di che, eseguendo le derivate di φ rispetto a $K_{r,s}$ per il tramite di K_1, K_2, K_3 si vede che le relazioni (4,1) vengono ad equivalere alla relazione omografica

$$\alpha = 1 - \frac{1}{3}\frac{\partial\varphi}{\partial K_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial K_2} K\varkappa - \frac{\partial\varphi}{\partial K_3} K\varkappa^2. \tag{4,3}$$

[5] A. Signorini, *Lezioni di Fisica Matematica* (Roma, 1953), p. 109.

[6] B. Finzi - M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, (Bologna, 1949) pag. 112 e sgg.

Nel caso ancor più particolare di deformazioni infinitesime, si viene ad avere, se si indica con η l'omografia linearizzata di deformazione, $\delta\varphi = -I_1[\eta\delta\beta]$ e quindi le (4,1) diventano

$$\eta_{r,s} = -\frac{\partial\varphi}{\partial X_{rs}} \tag{4,4}$$

essendo $X_{r,s}$ le componenti cartesiane di β.

Per sistemi isotropi, la (4,3) si scrive ora

$$\eta = -\frac{1}{3}\frac{\partial\varphi}{\partial J_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial J_2}\beta - \frac{\partial\varphi}{\partial J_3}\beta^2, \tag{4,5}$$

dove J_1, J_2, J_3 sono i tre invarianti dell'omografia β analoghi agli invarianti (4,2). Se si introduce infine il deviatore degli sforzi, cioè l'omografia γ legata a β dalla relazione.

$$\gamma = \beta - J_1, \tag{4,6}$$

la (4,5) diviene infine

$$\eta = -\left[\frac{1}{3}\frac{\partial\varphi}{\partial J_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial J_2}J_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial J_3}J_1^2\right] - \left[\frac{\partial\varphi}{\partial J_2} + 2J_1\frac{\partial\varphi}{\partial J_3}\right]\gamma - \frac{\partial\varphi}{\partial J_3}\gamma^2. \tag{4,7}$$

Si osservi adesso che i due invarianti J_2. e J_3 possono esprimersi in funzione degli analoghi invarianti S_2 ed S_3 di γ, essendo, come si vede dalla (4.6), $S_1 = 0$. Con ciò i coefficienti della (4,7) vengono ad essere funzioni, oltre che di J_1, di S_2 ed S_3, ed in sostanza la (4,7) medesima non viene a differire dalle relazioni deformazioni–sforzi stabilita da PRAGER per tutt'altra via, valida però, nelle ipotesi da lui adottate, anche per trasformazioni non dotate di energia di deformazione (7). Comunque, il fatto che la (4.7) *debba* sicuramente valere per i sistemi soggetti a trasformazioni infinitesime dotate di energia di deformazione viene a costituire una notevole conferma della validità generale della relazione di PRAGER.

(7) W. PRAGER, *Strain hardening under combined stresses*, « J. of. appl. Phy », **16** (1946), pp. 837-840.