Carmelo Longo

Su un tipo particolare di complessi lineari di piani in S_{3r-1}.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.2, p. 150–153.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_150_0>

Su un tipo particolare di complessi lineari di piani in S_{3r-1}.

Nota di CARMELO LONGO (a Roma)

Sunto. - *È contenuto nel n. 1.*

1. Indichiamo con $x^i (i = 0, ..., n)$ le coordinate proiettive omogenee di uno spazio proiettivo complesso S_n e con $p^{ikj} (i, k, j = 0, ..., n)$ le coordinate grassmanniane di piano. Supposto $n = 3r - 1$ determino (n. 2) la condizione necessaria e sufficiente perchè un complesso lineare di piani privo di centri

$$a_{ikj} p^{ikj} = 0 \tag{1.1}$$

sia riducibile, rispetto al gruppo proiettivo, alla forma canonica

$$\sum_{t=0}^{r-1} p^{3t,\, 3t+1,\, 3t+2} = 0 \tag{1.2}$$

contenente, cioè, il minimo numero possibile di termini. Determino poi (n. 3) alcune proprietà del complesso (1.2).

([2]) Tali formule si trovano nel mio citato lavoro inviato da tempo per la stampa nella *Rivista di Matematica della Università di Parma*. Sono state pure trovate da G. PALAMÀ (Cfr. Boll. Un. Mat. Ital., I fasc. 1954, p. 65), indipendentemente e per altra via.

2. Incominciamo a richiamare alcune definizioni relative ai complessi lineari di piani (c. l. - S_2) (¹).

1) Dato un c. l. - S_2 (1.1) ad una retta di coordinate r^{ik} è associato *l'iperpiano polare*

$$a_{ikj}r^{ik}x^j = 0,$$

luogo dei punti che congiunti con la retta danno tutti e soli i piani del complesso passanti per la retta.

2) Una retta si dice *singolare* per un complesso se ogni piano per essa appartiene al complesso, ossia se e solo se il relativo iperpiano polare è indeterminato. In particolare la retta congiungente i due punti fondamentali $O_0(\delta_0^i)$ ed $O_1(\delta_1^i)$ è singolare se e solo se: $a_{01j} = 0$.

3) *Spazio singolare totale* è uno spazio tale che ogni sua retta è singolare. In particolare lo spazio S_t, $x^{t+1} = ... = x^n = 0$ è singolare totale se e solo se $a_{\alpha\beta j} = 0$ ($\alpha, \beta = 0, 1, ..., t$; $j = 0, 1, ..., n$).

4) *Punto singolare di specie h* è un punto P tale che le rette singolari passanti per esso costituiscono una stella appartenente ad un $S_{2h+\varepsilon}$, con $\varepsilon = 0$, 1 secondo che n è pari o dispari.

Lo spazio $S_{2h+\varepsilon}$ si dice lo spazio singolare associato al punto P

Ciò ricordato, si ha:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un complesso lineare di piani in S_{3r-1} *sia riducibile alla forma* (1.2) *è che ci siano* $r - 1$ S_3 *passanti per uno stesso punto* P *e* (*per* $r > 2$) *non aventi a due a due altri punti comuni, tali che gli spazi singolari totali di dimensione massima e passanti per* P *siano tutti e soli gli* S_{r-1} *incidenti in rette ciascuno dei precedenti* S_3.

È subito visto che la condizione è necessaria. Infatti la proprietà è verificata per ciascun punto dei piani

$$x^{3t} = x^{3t+1} = x^{3t+2} = 0 \tag{2.1}$$

$$(t = 0, 1, ..., \tau, \tau + 2, ..., r - 1;\ \tau = 0, 1, ..., r - 1).$$

Dimostriamo che la condizione è sufficiente. Incominciamo ad osservare che per $r = 2$, dalle ipotesi del teorema, segue che il complesso (di S_5) non ammette piani singolari totali: esso è perciò di tipo generale e pertanto la sua equazione è riducibile alla forma canonica (1.2). Possiamo perciò dimostrare la proprietà per induzione.

(¹) Per le notazioni e per la bibliografia si veda la mia Memoria: *Sui complessi lineari di piani in S_n*, in corso di stampa nel vol. 37 degli « Annali di Matematica ».

Incominciamo ad osservare che posto

$$r = 2p + 1 + \varepsilon \qquad (\varepsilon = 0,\ 1)$$

il punto P è singolare di specie (massima) $h = 3p + \varepsilon$, ed ha come spazio singolare associato lo S^*_{3r-3} congiungente gli $r-1$ S_3 passanti per P.

In particolare supposto $P \equiv O_0$ e che lo S^*_{3r-3} abbia le equazioni, $x^1 = x^2 = 0$, il complesso (1.1) assume la forma

$$\alpha p^{012} + a_{1\alpha\beta} p^{1\alpha\beta} + a_{2\alpha\beta} p^{2\alpha\beta} + a_{12\alpha} p^{12\alpha} + a_{\alpha\beta\gamma} p^{\alpha\beta\gamma} = 0 \tag{2.2}$$
$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 3, \ldots, r-1).$$

Supposto che gli S_3 relativi al punto O_0 abbiano le equazioni

$$x^1 = x^2 = x^{3t} = x^{3t+1} = x^{3t+2} = 0 \tag{2.3}$$
$$(t = 1, \ldots, \tau,\ \tau+2, \ldots, r-1\,;\ \tau = 1, \ldots, r-1)$$

si ha che dei coefficienti $a_{1\alpha\beta}$ ed $a_{2\alpha\beta}$ sono diversi da zero solo quelli per i quali α, β assumono valori appartenenti ad una stessa terna, $3t$, $3t+1$, $3t+2$.

Considerato ora lo S_{3r-4}, $x^0 = x^1 = x^2 = 0$, (S_{3r-4} generico per lo S^*_{3r-3}) esso determina il *complesso traccia* $\overline{L}$:

$$a_{\alpha\beta\gamma} p^{\alpha\beta\gamma} = 0 \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = 3, \ldots, 3r-1). \tag{2.4}$$

È subito visto che, considerato un punto $\overline{P}$ di uno degli S_3 relativi al punto $P \equiv O_0$ ed appartenente allo S_{3r-4}, il punto $\overline{P}$, rispetto al complesso $\overline{L}$, soddisfa le condizioni dell' enunciato avendo come S_3 passanti per $\overline{P}$ gli S_3 che da $\overline{P}$ proiettano i piani intersezione dello S_{3r-4} con gli ulteriori S_3 (2.3) relativi al punto P. Ne segue che l' equazione (2.2) si può ridurre alla forma:

$$\alpha p^{012} + a_{\rho,3t,3t+1} p^{\rho,3t,3t+1} + a_{\rho,3t,3t+2} p^{\rho,3t,3t+2} +$$
$$+ a_{\rho,3t+1,3t+2} p^{\rho,3t+1,3t+2} + a_{12\alpha} p^{12\alpha} + \beta \sum_{t=1}^{r-1} p^{3t,3t+1,3t+2} = 0$$
$$(\rho = 1,\ 2\,;\ t = 1, \ldots, r-1\,;\ \alpha = 3, \ldots, 3r-1).$$

È subito visto poi che si può determinare una proiettività:

$$\sigma x^1 = \bar{x}^1,\ \sigma x^2 = \bar{x}^2,\ \sigma x_{3t+\mu} = \alpha_{1,t+\mu} \bar{x}^1 + \alpha_{2,t+\mu} \bar{x}^2 + \alpha_{3t+\mu} \bar{x}^{3t+\mu}$$
$$(\mu = 0,\ 1,\ 2)$$

in modo che si abbia

$$a_{1\alpha\beta} = a_{2\alpha\beta} = 0.$$

Scelta infine la retta $O_1 O_2$ in modo che il relativo iperpiano polare abbia l'equazione $x^0 = 0$, si ha

$$a_{12\alpha} = 0.$$

Dopo ciò il complesso assume l'equazione

$$\alpha p^{012} + \beta \sum_{t=1}^{r-1} p^{3t, 3t+1, 3t+2} = 0,$$

ed è subito visto che si può completare la scelta del punto unità in modo che si abbia $\alpha = \beta$ e perciò l'equazione (1.2).

3. Determiniamo ora alcune proprietà del complesso (1.2).

Estendendo quanto è noto nel caso $r = 2$, diremo che gli r piani (2.1) sono *i piani cardini* del complesso; diremo poi S_{3l-1} cardine lo spazio congiungente $l(< r)$ dei piani cardini.

Ciò posto, è subito visto che il complesso (1.2) ammette come *rette singolari* tutte e sole le rette incidenti gli r S_{3r-4} cardini.

Ne segue che un punto di un S_{3l-1} cardine è singolare di specie $h = r - l$; e viceversa. In particolare un generico punto dello S_{3r-1} è singolare di specie p, ed i punti dei piani cardini sono singolari di specie massima $h = 3p + \varepsilon$.

Inoltre il complesso ammette come spazi singolari totali di dimensione massima $d = r - 1$ tutti e soli gli S_{r-1} incidenti (in un punto) ciascun piano cardine. Ne segue:

Per un generico punto dello S_{3r-1} *passa uno ed uno solo* S_{r-1} *singolare totale.*

Si ha anche:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un complesso lineare di piani in S_{3r-1} *sia del tipo in esame è che esso ammetta come spazi singolari totali di dimensione massima* $\infty^{3(r-1)}$ S_{r-1} *tali che per un punto generico ne passi uno solo.*

Ne segue che i precedenti S_{r-1} sono gli S_{r-1} incidenti r piani (cardini), a due a due sghembi, luogo di punti per i quali passano infiniti S_{r-1} singolari totali.