
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LETTERIO TOSCANO

Carattere ipergeometrico dei polinomi associati a quelli di Hermite.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 9
(1954), n.2, p. 146–150.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_146_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Carattere ipergeometrico dei polinomi associati a quelli di Hermite.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina)

Sunto. - Si stabilisce il carattere ipergeometrico dei polinomi associati a quelli di HERMITE, esprimendoli con la funzione ipergeometrica confluyente Ψ_1 .

1. È nota la formula $h_n(x) = H_n(x)h_0(x) - e^{\frac{x^2}{2}} G_{n-1}(x)$ tra i polinomi $H_n(x)$ e le funzioni $h_n(x)$ di HERMITE, e i polinomi $G_{n-1}(x)$ ad essi associati, che restano con essa definiti.

In un mio lavoro in corso di stampa nella *Rivista Matematica della Università di Parma* su *Polinomi associati a polinomi classici* ho espresso i $G_n(x)$ in funzione degli $H_n(x)$, con la formula

$$(1) \quad G_n(x) = (-i)^n \sum_{r=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)(n-2r)!} H_{n-2r}(ix),$$

dove i è l'unità immaginaria.

Ho pure dimostrato che

$$(2) \quad \frac{d}{dx} G_n(x) = H_{n+1}(x) - G_{n+1}(x).$$

E da questa deduco qui un'altra formula del tipo della (1), non contenente l'unità i .

Si ha

$$\begin{aligned}
 G_0(x) &= H_0(x), \quad G_1(x) = H_1(x), \\
 G_2(x) &= H_2(x) - G_1'(x) = H_2(x) - H_1'(x) = H_2(x) - H_0(x), \\
 G_3(x) &= H_3(x) - 2H_1(x), \\
 G_4(x) &= H_4(x) - 3H_2(x) + 2H_0(x), \\
 G_5(x) &= H_5(x) - 4H_3(x) + 6H_1(x), \\
 G_6(x) &= H_6(x) - \binom{5}{1} 1! H_4(x) + \binom{4}{2} 2! H_2(x) - \binom{3}{3} 3! H_0(x), \\
 G_7(x) &= H_7(x) - \binom{6}{1} 1! H_5(x) + \binom{5}{2} 2! H_3(x) - \binom{4}{3} 3! H_1(x).
 \end{aligned}$$

In generale vale la formula

$$(3) \quad G_n(x) = \sum_0^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^r \binom{n-r}{r} r! H_{n-2r}(x),$$

che supposta vera per l'indice n si può facilmente dimostrare per l'indice $n+1$.

Infatti

$$\begin{aligned}
 G_{n+1}(x) &= H_{n+1}(x) - G_n'(x) \\
 &= H_{n+1}(x) - \sum_0^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^r \binom{n-r}{r} r! (n-2r) H_{n-2r-1}(x) \\
 &= H_{n+1}(x) + \sum_1^{\leq \frac{n+1}{2}} (-1)^r \binom{n+1-r}{r} r! H_{n+1-2r}(x) \\
 &= \sum_0^{\leq \frac{n+1}{2}} (-1)^r \binom{n+1-r}{r} r! H_{n+1-2r}(x).
 \end{aligned}$$

2. Dalla (3), poichè

$$H_n(x) = \sum_0^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^r \binom{n}{2r} \frac{(2r)!}{2^r r!} x^{n-2r},$$

segue

$$G_n(x) = \sum_0^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n-s}{s} s! \sum_0^{\leq \frac{n-2s}{2}} (-1)^r \binom{n-2s}{2r} \frac{(2r)!}{2^r r!} x^{n-2s-2r},$$

e con $r+s=m$

$$\begin{aligned}
 G_n(x) &= \sum_0^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^m \frac{x^{n-2m}}{(n-2m)!} \sum_{r+s=m} \frac{(n-s)!}{2^r r!} \\
 &= \sum_0^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^m \frac{x^{n-2m}}{(n-2m)!} \sum_0^m \frac{(n-s)!}{2^{m-s} (m-s)!}.
 \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\sum_0^m \frac{(n-s)!}{2^{m-s}(m-s)!} &= \frac{n!}{2^m m!} \sum_0^m \frac{(-m, s)}{(-n, s)} 2^s \\ &= \frac{n!}{2^m m!} {}_2F_1(-m, 1; -n; 2).\end{aligned}$$

E risalendo

$$(4) \quad G_n(x) = n! \sum_0^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^m \frac{{}_2F_1(-m, 1; -n; 2)}{m! (n-2m)! 2^m} x^{n-2m}.$$

3. Specializziamo ora la precedente per indice pari ($2n$) e dispari ($2n+1$).

Nel primo caso si ha

$$G_{2n}(x) = (2n)! \sum_0^n (-1)^m \frac{{}_2F_1(-m, 1; -2n; 2)}{m! (2n-2m)! 2^m} x^{2n-2m},$$

e successivamente

$$(5) \quad G_{2n}(x) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!} \sum_0^n \frac{(-n, m)}{\left(\frac{1}{2}, m\right) m!} {}_2F_1(-n+m, 1; -2n; 2) \left(\frac{x^2}{2}\right)^m$$

Mentre nel secondo caso si deduce

$$(6) \quad G_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^n n!} x \sum_0^n \frac{(-n, m)}{\left(\frac{3}{2}, m\right) m!} {}_2F_1(-n+m, 1; -2n-1; 2) \left(\frac{x^2}{2}\right)^m.$$

D'altra parte è noto che la funzione ipergeometrica confluyente a due variabili

$$\Psi_1(a; b; c, c'; x, y) = \sum_{r,s}^{0 \dots \infty} \frac{(a, r+s)(b, r)}{(c, r)(c', s)r! s!} x^r y^s$$

$$|x| + |y| < 1$$

ammette lo sviluppo

$$\Psi_1(a; b; c, c'; x, y) = \sum_0^\infty \frac{(a, m)}{(c', m)m!} {}_2F_1(a+m, b; c; x)y^m.$$

Facciamo in questa prima

$$a = -n, b = 1, c = -2n, c' = \frac{1}{2}, x = 2, y = \frac{x^2}{2}$$

e poi

$$a = -n, \quad b = 1, \quad c = -2n - 1, \quad c' = \frac{3}{2}, \quad x = 2, \quad y = \frac{x^2}{2}.$$

Segue

$$\Psi_1\left(-n; 1; -2n, \frac{1}{2}; 2, \frac{x^2}{2}\right) = \sum_0^n \frac{(-n, m)}{\left(\frac{1}{2}, m\right) m!} {}_2F_1(-n+m, 1; -2n; 2) \left(\frac{x^2}{2}\right)^m,$$

$$\Psi_1\left(-n; 1; -2n-1, \frac{3}{2}; 2, \frac{x^2}{2}\right) = \sum_0^n \frac{(-n, m)}{\left(\frac{3}{2}, m\right) m!} {}_2F_1(-n+m, 1; -2n-1; 2) \left(\frac{x^2}{2}\right)^m.$$

Confrontando con le (5) e (6) si ottengono le

$$(7) \quad G_{2n}(x) = (-2)^n \left(\frac{1}{2}, n\right) \Psi_1\left(-n; 1; -2n, \frac{1}{2}; 2, \frac{x^2}{2}\right)$$

$$(8) \quad G_{2n+1}(x) = (-2)^n \left(\frac{3}{2}, n\right) x \Psi_1\left(-n; 1; -2n-1, \frac{3}{2}; 2, \frac{x^2}{2}\right).$$

E queste ci permettono di stabilire il carattere ipergeometrico dei polinomi $G_{2n}(x)$ e $\frac{1}{x} G_{2n+1}(x)$, i quali — a meno di un fattore numerico — si possono considerare come particolari polinomi Ψ_1 con una variabile uguale a 2.

Un risultato dello stesso genere fu da me assegnato nel 1941 ⁽¹⁾, esprimendo con la Ψ_1 le funzioni

$$\begin{array}{ll} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) H_n(x) & m - n \text{ pari} \\ \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) H_n(x) & m - n \text{ dispari.} \end{array}$$

4. Introdotto il polinomio

$$\Psi_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1, n)}{n!} \Psi_1\left(-n; 1; -2n-\alpha-\frac{1}{2}, \alpha+1; 2, x\right),$$

(¹) L. TOSCANO, *Trasformata di Laplace di prodotti di funzioni di Bessel e polinomi di Laguerre*, « Mem. Pontificia Acc. Scien. », 5 (1941), pp. 471-500.

è facile vedere che le (7) e (8) assumono la forma

$$(9) \quad G_{2n}(x) = (-2)^n n! \Psi_n^{(-\frac{1}{2})} \left(\frac{x^2}{2} \right)$$

$$(10) \quad G_{2n+1}(x) = (-2)^n n! x \Psi_n^{(\frac{1}{2})} \left(\frac{x^2}{2} \right),$$

che richiama le cosiddette formule di SZEGÖ tra polinomi di HERMITE e di LAGUERRE.

Altre formule che richiamano quelle di SZEGÖ si possono ottenere esprimendo $G_{2n}(x)$ e $G_{2n+1}(x)$ con i polinomi associati a quelli di LAGUERRE ⁽²⁾.

5. Lo studio dei nuovi polinomi $\Psi_n^{(\alpha)}(x)$ potrebbe condurre a risultati degni di nota.