
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE TANTURRI

Una particolare quartica piana con catene di flessi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 9
(1954), n.2, p. 143–146.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_143_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Una particolare quartica piana con catene di flessi.

Nota di GIUSEPPE TANTURRI (a Torino)

Sunto. - *Si esamina una quartica piana di genere tre con quattro catene di quattro flessi ciascuna, e quattro ondulazioni allineate; e si prova che è invariante per un gruppo di sedici omografie.*

È noto che non si conoscono enunciati generali circa la configurazione dei flessi della quartica piana; anzi sono abbastanza poche le C^4 per le quali detta configurazione sia completamente nota. Qui presento un caso nuovo nel quale la questione si può approfondire. Lo spunto mi è stato offerto da un problema proposto dal CIANI ⁽¹⁾, il quale consiglia di determinare e studiare le quartiche dotate di *catene di flessi*: e per catena intende un insieme ordinato di flessi, ciascuno dei quali abbia come tangenziale quello che lo precede. È ben noto che la quartica di KLEIN possiede otto catene di tre flessi ciascuna; sulle C^4 con sei catene di quattro flessi si veda invece una nota di TERRACINI ⁽²⁾.

La curva di cui mi occupo ha quattro catene di quattro flessi ciascuna e inoltre quattro punti di ondulazione allineati.

Le C^4 con una catena assegnata di quattro flessi costituiscono una rete; assumendoli infatti, ordinatamente, come vertici $A_1 A_2 A_3$ del triangolo di riferimento e come punto unità $U \equiv A_4$, si trova

⁽¹⁾ CIANI E. - *Le curve piane di quart'ordine* (monografia), Scritti geometrici scelti, pag. 670.

⁽²⁾ TERRACINI A. - *Su alcune particolari quartiche piane di genere tre*, «Rend. Lincei», s. V., vol. XXV, 1916.

L'equazione

$$(1) \quad \lambda(x_1^3x_2 - x_1^3x_3 - x_1x_3^3 - 2x_2^3x_3 + 3x_1x_2x_3^2) + \\ + \mu(x_1^2x_3^2 - x_1^2x_2x_3 + x_2^3x_3 - x_1x_2x_3^2) + \nu(x_1x_2^2x_3 - x_2^3x_3) = 0.$$

Se si impone alla polare armonica di A_1 (che contiene A_2) di coincidere con la A_2A_3 si isola nella rete il fascio $\mu = 0$, e si verifica che di conseguenza, per tutte le curve di questo fascio, la polare armonica di A_3 è la A_4A_1 . La catena può dirsi in tal caso *emisimmetrica* poichè la polare armonica di un suo flesso, e dell'opposto, congiunge i due consecutivi e coincide, di conseguenza, con un lato della catena. La rete (1) contiene due fasci di curve con catena emisimmetrica: il precedente, e l'altro $3\lambda + \nu = 0$ nel quale la circostanza chiarita si verifica a partire dai flessi A_2 e A_4 . La curva comune ai due fasci possiede catena *simmetrica*, cioè per essa ogni flesso A_h ha polare armonica coincidente con la retta che congiunge i due consecutivi (cioè con un lato). Essa ha equazione

$$(2) \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3x_2 - x_1^3x_3 + x_2^3x_3 - x_1x_3^3 + 3x_1x_2x_3^2 - 3x_1x_2^2x_3 = 0$$

ed è appunto l'oggetto del nostro esame.

Si verificano senza gravi difficoltà le proprietà seguenti:

a) la hessiana è spezzata in rette, e precisamente si compone di una retta p contata due volte avente equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, e di quattro rette r_i , passanti per il punto $P(1, 0, 1)$, di equazioni $x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $2x_2 = (1 \pm \sqrt{5})(x_1 - x_3)$; di queste, le prime due sono diagonali del quadrangolo semplice che ha per vertici i flessi A_h della catena;

b) le r_i incontrano armonicamente la C^4 , e lo stesso avviene di ogni retta del loro fascio (ossia dell'*inviluppo armonico* della curva fa parte il fascio di centro P);

c) per quanto risulti anche dal seguito, si prova direttamente che sulle $x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$ ci sono oltre agli A_h , altri quattro flessi B_h formanti catena; e i quadrangoli di vertici A_h e B_h , considerati come quadrangoli completi, hanno lo stesso triangolo diagonale avente un vertice in P e gli altri due sulla p . Le coordinate dei B_h sono $(1, 0, \pm i)$, $(1, 1 \pm i, 1)$ ove $i = \sqrt{-1}$;

d) la prima polare del punto P è la p contata tre volte.

Segue da a) che i flessi della curva si distribuiscono su cinque rette di cui una, la p , contata due volte; e siccome questa incontra la C^4 in punti distinti, su essa si prevedono quattro ondulazioni. Ciò è giustificato da quanto seguirà. Ammesso questo, la curva ha

genere tre poichè ha sedici flessi (sulle r_i) e quattro ondulazioni ⁽³⁾. Inoltre consegue da d) che, con nuovo riferimento (assunto cioè $\bar{A}_3 \equiv P$, $y_3 = 0$ coincidente con p , e con opportuna scelta di $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{U}$) l'equazione della curva può scriversi

$$(3) \quad y_1^4 + 6ky_1^2y_2^2 + y_2^4 + y_3^4 = 0$$

ove k si determina come radice dell'equazione

$$\frac{(3k^2 + 1)^3}{k^2(k^2 - 1)^2} = 32$$

ottenuta eguagliando gli invarianti assoluti delle quaterne secate sulla p dalla (2) e sulla $y_3 = 0$ dalla (3). La (4) ammette fra le altre la radice $k = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e perciò la C^4 ha equazione canonica

$$(5) \quad y_1^4 + \frac{6}{\sqrt{5}} y_1^2 y_2^2 + y_2^4 + y_3^4 = 0. \quad (4)$$

Eguagliando a zero il gruppo dei primi tre termini si ha l'equazione complessiva di quattro rette distinte t_i ciascuna delle quali incontra la (5) in un punto computato quattro volte sulla $y_3 = 0$: dunque la curva in esame ha quattro ondulazioni allineate con le tangenti formanti fascio. Risulta inoltre dalla struttura della (5) che la curva è invariante per le omografie di un gruppo G_{16} rappresentato dalle

$$\begin{pmatrix} x_1, & \pm x_2, & i^r x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_2, & \pm x_1, & i^r x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i = \sqrt{-1} \\ r = 0, 1, 2, 3. \end{matrix}$$

Una omografia non identica del gruppo porta ad esempio il flesso A_1 in un altro qualsiasi dei quindici flessi ordinari rimanenti: infatti, nell'ipotesi contraria, vi sarebbe almeno una omografia non identica del G_{16} avente A_1 come punto unito, e di conseguenza avrebbe come uniti anche gli altri tre flessi A_2 , A_3 , A_4 della catena. Segue che

la curva possiede quattro catene simmetriche di flessi, vertici di quattro quadrangoli a coppie associati in modo che due quadrangoli di una stessa coppia hanno lo stesso triangolo diagonale, e le coppie di vertici situati su uno stesso lato di tale triangolo si dividono armonicamente; inoltre i quattro quadrangoli hanno in comune un punto diagonale che è punto di concorso delle quattro tangenti di ondulazione.

⁽³⁾ Del resto si verifica direttamente che la (2) non ha punti multipli.

⁽⁴⁾ Sostituendo a R altre radici della (4) si trovano curve proiettivamente equivalenti alla (5).

Risulta ancora che *il G_{16} è il più ampio gruppo di omografie della curva in sé*: infatti i flessi ordinari sono sedici, e una omografia muta un flesso in un altro flesso; nè, per quanto detto, esiste una trasformazione proiettiva non identica che lasci fissa la C^4 e un suo flesso.

Alcune fra le proprietà suddette ricordano la quartica di CAPORALI specializzata; però la (2) non è tale, come si vede dall'ordine del gruppo per il quale è invariante, e anche perchè una C^4 di CAPORALI ha le quattro ondulazioni formanti gruppo equianarmonico, ciò che per la (2) non avviene. Anzi non si tratta neppure di una curva di CAPORALI non specializzata: infatti, ricordando che per queste i flessi possono distribuirsi su certe rette in quaterne equianarmoniche, si constata che, delle rette uscenti per esempio da A_1 e secanti la curva in un gruppo equianarmonico, nessuna contiene uno dei flessi B_h , mentre si vede subito che, se si trattasse di una quartica di CAPORALI, dovrebbe contenerne uno di ciascuna catena.