Cataldo Agostinelli

Sistemi di equazioni differenziali normali del I ordine che ammettono speciali relazioni invarianti e che interessano il movimento di sistemi anolonomi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.2, p. 136–141.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_136_0>

Sistemi di equazioni differenziali normali del I ordine che ammettono speciali relazioni invarianti e che interessano il movimento di sistemi anolonomi.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino)

Sunto. - *Si considerano dei sistemi di equazioni differenziali normali del* I *ordine che ammettono delle relazioni invarianti subordinatamente all'esistenza di particolari soluzioni stazionarie e che si presentano in certi problemi relativi al movimento di sistemi anolonomi.*

1. Nello studio del movimento di certi sistemi *anolonomi*, retto ad esempio da un sistema di n equazioni differenziali normale nel I ordine della forma

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

nelle n funzioni incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ della variabile indipendente t, può avvenire che introducendo un certo numero k di opportuni *parametri caratteristici* indipendenti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$, con $k < \frac{n}{2}$, funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\omega_r = \omega_r(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (r = 1, 2, \ldots, k) \tag{2}$$

le equazioni (1) ammettano come conseguenza delle relazioni della forma

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_r}{dt} &= a_{r1}\frac{dx_{n-h+1}}{dt} + a_{r2}\frac{dx_{n-h+2}}{dt} + \ldots + a_{rh}\frac{dx_n}{dt} = \\ &= \sum_1^h{}_j\, a_{rj}\frac{dx_{n-h+j}}{dt}; \qquad \left(r = 1, 2, \ldots, h;\ k \leq h < \frac{n}{2}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

le quali si potranno sostituire a k opportune equazioni del sistema (1).

Ora, se il sistema (1) ammette delle soluzioni stazionarie in cui le incognite $x_{n-h+1}, x_{n-h+2}, \ldots, x_n$ si mantengono costanti per tutta la durata del moto, se lo sono inizialmente, allora le (3) mostrano che per tutta la durata del moto saranno anche costanti i parametri caratteristici ω_r. Le $\omega_r = \text{cost.}$ si diranno in tal caso *relazioni invarianti* del sistema (1) subordinatamente all'esistenza nella soluzione stazionaria considerata. Esse *non* sono integrali del sistema, poichè la loro invarianza dipende dall'eventuale invarianza delle $x_{n-h+1}, x_{n-h+2}, \ldots, x_n$; pertanto i valori costanti delle ω_r dipenderanno dai valori costanti che assumeranno le $x_{n-h+1}, x_{n-h+2}, \ldots, x_n$ [1].

2. Affinchè il sistema (1) ammetta come conseguenza delle relazioni del tipo (3), le derivate rispetto al tempo delle caratteristiche (2), quando si tenga conto delle (1), devono ridursi alla forma (3). Ora dalla (2) si ricava

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \sum_1^{n-h}{}_i \frac{\partial\omega_r}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \sum_1^{h}{}_j \frac{\partial\omega_r}{\partial x_{n-h+j}} \cdot \frac{dx_{n-h+j}}{dt}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, k) \tag{4}$$

cioè, per le (1)

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \sum_1^{n-h}{}_i \frac{\partial\omega_r}{\partial x_i} F_i + \sum_1^{n-h}{}_j \frac{\partial\omega_r}{\partial x_{n-h+j}} \cdot \frac{dx_{n-h+j}}{dt} \tag{4'}$$

Perciò, affinchè le $\omega_r = \text{cost.}$ siano relazioni invarianti del sistema (1), nel senso qui definito, dovranno essere necessariamente verificate le condizioni

$$\sum_1^{n-h}{}_i \frac{\partial\omega_r}{\partial x_i} F_i = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, k). \tag{5}$$

Queste condizioni sono anche sufficienti affinchè il sistema (1) ammetta come conseguenza delle relazioni del tipo (7), che cioè queste siano soddisfatte da ogni soluzione $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ del sistema (1).

Infatti, sussistendo la (5) identicamente per valori arbitrari di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sussisteranno anche per tutte le n^{ple} di funzioni $x_i(t)$ che sono soluzioni del sistema (1) e le equazioni (4′), ovvero le (4), si ridurranno proprio alla forma (3).

[1] Si osservi che le relazioni invarianti qui considerate si possono ritenere di tipo più generale di quelle a cui ordinariamente si attribuisce la stessa denominazione (Cfr. T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, P. II, cap. X, § 4, Zanichelli, Bologna, 1927). Invero queste ultime sono della forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ e soddisfano ad una relazione del tipo $\frac{df}{dt} = \lambda f$. In tal caso tutte le soluzioni del sistema (1) che annullano la f in un dato istante, per esempio per $t = 0$, l'annullano anche per ogni altro valore di t.

3. Abbiamo supposto che il sistema (1) ammetta delle soluzioni stazionarie in cui le incognite $x_{n-h+1}, x_{n-h+2}, \dots, x_n$ si mantengono costanti per tutta la durata del moto se lo sono inizialmente. Quando ciò avviene saranno nulle per tutta la durata del moto le derivate temporali $\dot{x}_{n-h+1}, \dot{x}_{n-h+2}, \dots, \dot{x}_n$; cioè, in virtù delle ultime h equazioni del sistema (1), che si riducono alle

$$(6) \qquad F_{n-h+j} = 0, \qquad (j = 1, 2, \dots, h)$$

queste dovranno risultare degli invarianti del sistema (1) nel senso ordinario, cioè dovranno sussistere, come conseguenza delle stesse (1), h relazioni del tipo.

$$(7) \qquad \frac{dF_{n-h+j}}{dt} = \sum_{1}^{h}{}_{l}\, \lambda_{jl} F_{n-h+l}, \qquad (j = 1, 2, \dots, h)$$

Ma derivando rispetto al tempo le F_{n-h+j} si ha

$$(8) \qquad \frac{dF_{n-h+j}}{dt} = \sum_{1}^{n-h}{}_{i} \frac{\partial F_{n-h+j}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_{1}^{h}{}_{l} \frac{\partial F_{n-h+j}}{\partial x_{n-h+l}} \cdot \frac{dx_{n-h+l}}{dt},$$

cioè, avendo riguardo alle equazioni del sistema (1),

$$(8') \qquad \frac{dF_{n-h+j}}{dt} = \sum_{1}^{n-h}{}_{i} \frac{\partial F_{n-h+j}}{\partial x_i} F_i + \sum_{1}^{h}{}_{l} \frac{\partial F_{n-h+j}}{\partial x_{n-h+l}} F_{n-h+l}.$$

perciò, affinchè le (6) costituiscano delle relazioni invarianti del sistema (1), e sussistano quindi delle soluzioni stazionarie in cui le $x_{n-h+1}, x_{n-h+2}, \dots, x_n$ si mantengono costanti, devono essere necessariamente verificate le condizioni

$$(9) \qquad \sum_{1}^{n-h}{}_{i} \frac{\partial F_{n-h+j}}{\partial x_i} F_i = 0, \qquad (j = 1, 2, \dots, h).$$

Queste condizioni sono anche sufficienti perchè le (6) siano relazioni invarianti del sistema (1). Invero, se esse sono identicamente verificate per valori arbitrari degli argomenti $x_1, x_2, \dots, x_n$, lo saranno anche per le funzioni $x_i(t)$ che sono soluzioni del sistema (1), e quindi le (8′) si ridurranno alla forma (7) per ogni soluzione del sistema.

Concludendo abbiamo il teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema di* n *equazioni differenziali normali del I ordine, nelle incognite* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *della variabile indipendente* t, *ammetta delle soluzioni stazionarie in cui un certo numero di incognite* $(x_{n-h+1}, x_{n-h+2}, \dots, x_n)$ *si mantengano costanti durante il moto, se lo sono inizialmente, e che inoltre, subordinatamente all'esistenza di queste soluzioni, sussistano* k *relazioni invarianti* $\omega_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = cost.$, *è che siano identicamente verificate le condizioni* (5) *e* (9).

4. Osserviamo che quando le condizioni (9) sono soddisfatte, ponendo nelle (1)

$$x_{n-h+1} = c_1, \quad x_{n-h+2} = c_2, \dots, x_n = c_h,$$

ove le h costanti $c_1, c_2, \dots, c_h$ sono a priori arbitrarie, il sistema (1) diventa

$$(10) \qquad \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-h}, c_1, c_2, \dots, c_h), \quad (i = 1, 2, \dots, n-h),$$

$$(10') \qquad 0 = F_{n-h+j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-h}, c_1, c_2, \dots, c_h), \quad (j = 1, 2, \dots, h),$$

cioè si riduce al sistema (10) cui vanno associate le h relazioni invarianti (10')

Supposto diverso da zero l'jacobiano delle F_{n-h+j}, $(j = 1, 2, \dots, h)$ rispetto ad h delle $x_1, x_2, \dots, x_{n-h}$, per esempio rispetto alle $x_{n-2h+\alpha}$, per $\alpha = 1, 2, \dots, h$, allora le (10') definiscono le incognite $x_{n-2h+1}, x_{n-2h+2}, \dots, x_{n-h}$, per mezzo delle $x_1, x_2, \dots, x_{n-2h}$ (almeno in un certo campo di variabilità di queste ultime), mediante relazioni della forma

$$(11) \qquad x_{n-2h+\alpha} = \gamma_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{n-2h}; c_1, c_2, \dots, c_h), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h)$$

Scindendo il sistema (10) nei due sistemi parziali

$$(12) \qquad \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-2h}, x_{n-2h+1}, \dots, x_{n-h}, c_1, c_2, \dots, c_h)$$

$$(12') \qquad \frac{dx_{n-2h+\alpha}}{dt} = F_{n-2h+\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h),$$

quest'ultimo sistema, quando si tenga conto delle identità (9) e delle (12), sarà equivalente alle relazioni invarianti (10'), ovvero alle equazioni (11). Cioè dovrà risultare

$$(13) \qquad \frac{dx_{n-2h+\alpha}}{dt} \equiv \frac{d\gamma_\alpha}{dt} \equiv \sum_{1}^{n-2h}{}_i \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial x_i} F_i = F_{n-2h+\alpha}$$

Invero, se nelle (10') al posto delle $x_{n-2h+\alpha}$ si pongono le corrispondenti γ_α, $(\alpha = 1, 2, \dots, h)$, si ottengono delle identità

$$F_{n-h+j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2h}, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_h; c_1, c_2, \dots, c_h) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, h).$$

Derivando rispetto ad x_i, per $i = 1, 2, \dots, n - 2h$, si hanno ancora le identità

$$\frac{\partial F_{n-h+j}}{\partial x_i} + \sum_{1}^{h}{}_{\alpha} \frac{\partial F_{n-h+j}}{\partial x_{n-2h+\alpha}} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n - 2h).$$

Moltiplicando ambo i membri di quest'ultima relazione per F_i e sommando rispetto all'indice i da 1 ad $n - 2h$, segue

$$\sum_{1}^{n-2h}{}_{i} \frac{\partial F_{n-h+j}}{\partial x_i} F_i + \sum_{1}^{h}{}_{\alpha} \frac{\partial F_{n-h+j}}{\partial x_{n-2h+\alpha}} \sum_{1}^{n-2h}{}_{i} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial x_i} F_i = 0.$$

Sottraendo ora membro a membro la (9) si ottiene

$$\sum_{1}^{h}{}_{\alpha} \frac{\partial F_{n-h+j}}{\partial x_{n-2h+\alpha}} \left(\sum_{1}^{n-2h}{}_{i} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial x_i} F_i - F_{n-2h+\alpha} \right) = 0, \qquad (j = 1, 2, \dots, h).$$

Queste costituiscono un sistema di h equazioni lineari omogenee nelle h quantità chiuse fra parentesi, il cui determinante dei coefficienti è l'jacobiano delle F_{n-h+j} rispetto alle $x_{n-2h+\alpha}$, che per ipotesi è diverso da zero. Dunque quelle quantità sono tutte nulle, cioè sono verificate le (13).

Il problema si riduce pertanto all'integrazione del sistema differenziale normale del I ordine (12), ove nei secondi membri al posto delle $x_{n-2h+1}, x_{n-2h+2}, \dots, x_{n-2h}$ si pongano i valori espressi dalle (11).

Si ha in tal modo un sistema di $n - 2h$ equazioni differenziali del I ordine nelle $n - 2h$ funzioni incognite $x_1, x_2, \dots, x_{n-2h}$ della variabile indipendente t. L'integrale generale di questo sistema involgerà altre $n - 2h$ costanti arbitrarie, oltre $c_1, c_2, \dots, c_h$, e le soluzioni stazionarie considerate dipenderanno in definitiva da $n - h$ costanti arbitrarie.

5. È opportuno osservare infine che quando sono verificate le condizioni (5) e (9) si ha ancora un sistema di relazioni invarianti associando alle $x_{n-h+1} = c_1, x_{n-h+2} = c_2, \dots, x_n = c_h$, le *condizioni di stazionarietà* di una qualsiasi ω_r, considerata dipendente dalle sole variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n-h}$, cioè le equazioni

$$(14) \qquad \frac{\partial \omega_r}{\partial x_j} = 0, \qquad (j = 1, 2, \dots, n - h).$$

Infatti si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \omega_r}{\partial x_j}\right) = \sum_{1}^{n-h}{}_{i} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial x_i \partial x_j} F_i + \sum_{1}^{h}{}_{i} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial x_{n-h+i} \partial x_j} F_{n-h+i} \,.$$

Ma dalle identità (5), per ogni valore dell'indice r si ricavano, derivando rispetto ad x_j, le altre identità

$$\sum_1^{n-h}{}_i \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial x_i \partial x_j} F_i = - \sum_1^{n-h}{}_i \frac{\partial \omega_r}{\partial x_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_j},$$

perciò

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \omega_r}{\partial x_j}\right) = - \sum_1^{n-h}{}_i \frac{\partial \omega_r}{\partial x_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_1^{h}{}_i \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial x_{n-h+i} \partial x_j} F_{n-h+i}.$$

Da questa risulta che quando è $x_{n-h+1} = c_1$, $x_{n-h+2} = c_2, \ldots, x_n = c_h$, e quindi $F_{n-h+1} = 0$, $F_{n-h+2} = 0, \ldots, F_n = 0$, se si pone $\frac{\partial \omega_r}{\partial x_j} = 0$, per $j = 1, 2, \ldots, n-h$, si ha anche $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \omega_r}{\partial x_j}\right) = 0$, e questo dimostra l'asserto.