Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Ricci

Emisimmetria di tratti e teorema di Vivanti-Pringsheim-Hadamard-Fabry relativo ai punti critici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.2, p. 126–135.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_126_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Emisimmetria di tratti e teorema di Vivanti - Pringsheim Hadamard - Fabry relativo ai punti critici.

Nota di GIOVANNI RICCI (a Milano)

Sunto. - *Nella condizione sufficiente che localizza un punto critico sulla circonferenza di convergenza e in quella analoga che garantisce questa circonferenza come linea critica, si considerano i tratti della successione dei coefficienti (presi in esame secondo* J. HADAMARD *ed* E. FABRY) *e, valendoci della emisimmetria o sopraemisimmetria di tali tratti, si generalizzano i teoremi classici.*

1. - Sono noti i teoremi che hanno avuto origine dalle classiche proposizioni di G. VIVANTI, A. PRINGSHEIM e J. HADAMARD riguardanti la localizzazione di un punto critico sulla circonferenza di convergenza di un elemento analitico $\Sigma a_n z^n$ e quelli analoghi riguardanti la non prolungabilità di detto elemento fuori della circonferenza stessa (cioè la circonferenza come linea critica ([1])). Di tali teoremi ricordiamo i due seguenti, che hanno carattere elementare, nel senso che la loro dimostrazione non si serve del passaggio dall'elemento $\Sigma a_n z^n$ all'elemento $\Sigma a_n g(n) z^n$ mediante la trascendente intera ausiliaria $g(z)$.

« L'elemento analitico $\sum_0^\infty a_n z^n$ abbia raggio di convergenza 1. Il punto 1 è critico se

(V) è possibile determinare

(i) una successione $\{n_h\}$ crescente di indici interi $n_1, n_2, n_3, \dots$,

(ii) una successione $\{\gamma_h\}$ di orientazioni $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$,

(iii) un numero reale $0 < \theta < 1$,

tali che sia

$$\mathrm{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \qquad \{\mathrm{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \to 1 \text{ per } h \to +\infty$$

([1]) La letteratura su tali teoremi è molto vasta: ci limitiamo a ricordare qui le opere seguenti, delle quali le prime quattro riassumono i lavori anteriori e contengono indicazioni:

E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 2. Aufl., Berlin, 1929, pp. 14-16, 72-86.

S. MANDELBROJT, *Modern Researches on the Singularities of Functions defined by Taylor's Series*, The Rice Institute Pamphlet, **14** (1927), pp. 223-352, in particolare Ch. V, XII. *Les singularités des Fonctions Analytiques représentées par une série de Taylor*, Mémorial d. Sciences Mathém.

e i coefficienti a_m di ogni tratto

$$(I_h) \qquad (1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h$$

appartengano al semipiano $\mathrm{Re}(ze^{-i\gamma_h}) \geqq 0$, cioè sia $\mathrm{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) \geqq 0$ per $m \in I_h$ ».

Dando a questa condizione (V) una forma che non dipenda da $\arg a_n$, si ottiene il seguente (J. Hadamard)

« L'elemento analitico $\sum_0^\infty a_n z^n$ abbia raggio di convergenza 1. La circonferenza $|z| = 1$ è linea critica se

(H) è possibile determinare

(i) una successione $\{n_h\}$ crescente di indici interi $n_1, n_2, \ldots$.

(ii) un numero reale $0 < \theta < 1$,

tali che sia $|a_{n_h}|^{1/n_h} \to 1$ per $h \to +\infty$ e siano nulli tutti i coefficienti a_m, con $m \neq n_h$, di ogni tratto

$$(I_h) \qquad (1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h \text{ ».}$$

Ora domandiamoci: È possibile attenuare le condizioni sufficienti (V) e (H) seguendo le intenzioni 1°) di trarre partito dall'eventuale emisimetria del tratto I_h dei coefficienti a_m? e in qual modo? 2°) di consentire ai coefficienti a_m una maggiore arbitrarietà specialmente nelle zone estreme del tratto I_h? e in quale misura?

A queste due domande si risponde affermativamente e, in forma precisa, con i teoremi esposti ai nn. 3 e 5.

Ricordiamo che un tipo di arbitrarietà sui coefficienti a_m per le condizioni di tipo (V) e per quelle di tipo (H) viene segnalata anche dal classico teorema di E. Fabry, più generale di quello ricordato, che consente $o(n_h)$ coefficienti eccezionali (oppure $o(n_h)$ variazioni di segno) in ogni tratto I_h [2] e che la maggiore arbitrarietà nelle zone periferiche dei tratti I_h, limitatamente alle condizioni di tipo (H). è già stata studiata da F. Lösch [3] e H. Claus [4];

54, Paris, Gauthier-Villars, 1932. *Séries lacunaires*, Actualités Scient. **305**, Paris, Hermann, 1936

G. Polya, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen*, Math. Zeitschrift, **29** (1929), pp. 549-640.

Altri lavori verranno citati in seguito.

(2) Ved. E. Landau, loc. cit. in (1) p. 81.

(3) F. Lösch, *Ueber nichtfortsetzbare Potenzreihen mit Lücken*, Math. Zeitschrift, **32** (1930), pp. 415-421.

(4) H. Claus, *Neue Bedingungen für die Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen*, Math Zeitschrift, **49** (1944), pp. 161-191.

tuttavia riteniamo interessanti le osservazioni e proposizioni che seguono perchè 1°) si riferiscono anche a condizioni di tipo (V), 2°) sotto un certo aspetto, sono più generali in quanto tengono conto della prospettata emisimmetria, 3°) le dimostrazioni si ottengono con semplici osservazioni su quella classica elementare nella forma esposta in E. LANDAU, e senza introdurre la trascendente intera $g(z)$ ausiliaria.

2. Emisimmetria e sopraemisimmetria. Introduciamo per comodità le seguenti definizioni molto naturali:

La successione (finita) $a_{-k}, a_{-k+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ si dice *emisimmetrica* se

$$a_{-u} + a_u = 0 \quad \text{per} \quad u = 1, 2, \dots, k \tag{2.1}$$

(osserviamo esplicitamente che a_0 può anche essere non nullo).

Nel caso che i numeri di detta successione siano *reali*, essa si dice *sopraemisimmetrica* se

$$a_{-u} + a_u \geqq 0, \quad \text{per} \quad u = 1, 2, \dots, k. \tag{2.2}$$

Si consideri una funzione $\psi(u)$ reale non negativa

$$\psi(u) \geqq 0 \quad \text{per} \quad u = 1, 2, \dots, k;$$

la stessa successione finita $a_{-k}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_k$, si dice *$\psi$-emisimmetrica* se

$$| a_{-u} + a_u | \leqq \psi(u), \quad \text{per} \quad u = 1, 2, \dots, k. \tag{2.3}$$

Nel caso che i numeri di detta successione siano *reali,* essa si dice *ψ-sopraemisimmetrica* se

$$a_{-u} + a_u \geqq -\psi(u) \quad \text{per} \quad u = 1, 2, \dots, k. \tag{2.4}$$

È evidente che ogni successione finita emisimmetrica (oppure sopraemisimmetrica) è a maggior ragione ψ–emisimmetrica (oppure ψ–sopraemisimmetrica); e analogamente se $\psi_1(u) \geqq \psi_2(u)$ la ψ_2–emisimmetria porta di conseguenza la ψ_1–emisimmetria: lo stesso si dica per la ψ_2–sopraemisimmetria e la ψ_1–sopraemisimmetria.

Osservazione – Si consideri la funzione

$$\psi_n(u) = \frac{1}{\theta n} \exp(u^2/n) \cdot | a_n | \tag{2.5}$$

che per ogni $\theta > 0$ e ogni n fissati, è crescente al crescere di u di un ordine esponenziale; essa si presenterà in modo naturale in seguito a una valutazione asintotica che eseguiremo al n. 4.

Sia $0 < \theta < 1$; nella successione $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$ si consideri il tratto I costituito da

$$\{a_m\} \quad (1-\theta)n \leqq m \leqq (1+\theta)n; \tag{2.6}$$

esso risulta ψ_n-emisimmetrico se

$$| a_{n-u} + a_{n+u} | \leqq \frac{1}{\theta n} \exp(u^2/n) \cdot | a_n | \quad (u = 1, 2, ..., [\theta n]) \tag{2.7}$$

e, nel caso di $\{a_n\}$ a elementi reali; risulta ψ_n-sopraemisimmetrico se

$$a_{n-u} + a_{u+u} \geqq -\frac{1}{\theta n} \exp(u^2/n) \cdot | a_n | \quad (u = 1, 2, ..., [\theta n]). \tag{2.8}$$

Sia $0 < \theta' < \theta < 1$ e si considerino la funzione $\psi'_n(u)$ e il tratto I' analoghi a $\psi_n(u)$ e I (ottenuti sostituendo θ' a θ); è evidente che I' è contenuto in I e $\psi'_n > \psi_n$ e, pertanto, dalla ψ-emisimmetria o ψ-sopraemisimmetria di I segue la ψ'-emisimmetria o ψ'-sopraemisimmetria di I'.

Adesso poniamoci la questione seguente: siano a_m reali e risultino verificate le disuguaglianze

$$a_n > 0 \tag{2.9}$$

$$a_{n-u} + a_{n+u} \geqq -2e^{\varepsilon n}a_n (u = 1, 2, ..., [\theta n]). \tag{2.10}$$

Se il tratto I è ψ-sopraemisimmetrico, quali sono i valori $m = n \pm u$ pei quali la condizione (2.8) di ψ-sopraemisimmetria risulta soddisfatta in conseguenza delle (2.9) e (2.10)?

Affinchè sia soddisfatta la (2.8) basta che sia

$$-2e^{\varepsilon n} \geqq -\frac{1}{\theta n} \exp(u^2/n)$$

cioè

$$u^2/n \geqq \varepsilon n + \log(2\theta n)$$

e quindi basta

$$u \geqq \tau n, \quad \text{dove} \quad \tau = \sqrt{\varepsilon + \log(2\theta n)/n}. \tag{2.11}$$

Dunque quando siano verificate le (2.9) e (2.10) e risulti $\tau < \theta$, il tratto I $(1-\theta)n \leqq m \leqq (1+\theta)n$ consta di un tratto céntrale I^* e e di due tratti estremi I' e I''

$$(1-\theta)n \leqq m < (1-\tau)n \tag{I'}$$

$$(1-\tau)n \leqq m \leqq (1+\tau)n \tag{I^*}$$

$$(1+\tau)n \leqq m \leqq (1+\theta)n; \tag{I''}$$

la ψ-sopraemisimmetria è senz'altro verificata in I' e I'', e per averla in tutto I basta richiederla nel tratto centrale I^*, cioè basta avere, insieme a (2.9) e (2.10)

$$(2.12) \qquad a_{n-u} + a_{n+u} \geqq -\frac{1}{n\theta} \exp(u^2/n) \cdot |a_n| \qquad (u = 1, 2, \ldots, [\tau n]).$$

3. La condizione pel punto critico. Quando siano introdotte le precedenti definizioni, otteniamo le seguenti proposizioni:

TEOREMA. – *L'elemento analitico* $\Sigma a_n z^n$ *abbia raggio di convergenza* 1. *Il punto* 1 *è critico se è soddisfatta la condizione seguente:*

(V_1) *esistono*

(i) *una successione* $\{n_h\}$ *crescente di indici interi* $n_1, n_2, \ldots$,

(ii) *una successione* $\{\gamma_h\}$ *di orientazioni* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$,

(iii) *un numero reale* $0 < \theta < 1$,

tali che sia

$$(3.1) \qquad \mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \quad \{\mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \to 1 \text{ per } h \to +\infty$$

e ogni tratto $\{\mathrm{Re}\,(a_m e^{-i\gamma_h})\}$, $(1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h$, *sia sopraemisimmetrico, cioè*

$$(3.2) \qquad \mathrm{Re}\,((a_{n_h-u} + a_{n_h+u}) e^{-i\gamma_h}) \geqq 0, \quad (u = 1, 2, \ldots, [\theta n_h]).$$

Questa condizione (V_1) è verificata, per esempio, quando, posto $\arg(a_{n_h-u} + a_{n_h+u}) = \varphi_{h,u}$, risulta

$$\varphi_{h,u+1} - \varphi_{h,u} < K/n_h \qquad (K \text{ costante}).$$

Il teorema precedente sussiste ancora quando, ferme restando tutte le altre condizioni contemplate in (V_1), la condizione (3.2) viene sostituita con la seguente

$$(3.3) \qquad |\Sigma_h^-| \leqq (1-\theta)\,\mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})$$

dove Σ_h^- è la somma dei numeri (reali) negativi della successione (finita)

$$\mathrm{Re}\,((a_{n_h-u} + a_{n_h+u}) e^{-i\gamma_h}), \qquad (u = 1, 2, \ldots, [\theta n_h]).$$

Inoltre il teorema precedente vale ancora se alla condizione (V_1) si sostituisce una qualunque delle due seguenti (V_2) e (V_3):

(V_2) *Esistono* $\{n_n\}$, $\{\gamma_h\}$, $0 < \theta < 1$ *come in* (V_1) *tali che*

$$\text{(3.1)} \qquad \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \quad \{\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \to 1$$

e ogni tratto

$$\{\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})\}, \ (1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h$$

sia ψ*-sopraemisimmetrico, cioè si abbia*

$$\text{(3.4)} \qquad \operatorname{Re}((a_{n_h-u} + a_{n_h+u})e^{-i\gamma_h}) \geqq -\frac{1}{\theta n_h}\exp(u^2/n) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})$$
$$(u = 1, 2, \ldots, [n\theta]).$$

Questa condizione (V_2) è soddisfatta se nel tratto $(1-\theta)n_h \leqq$ $\leqq m \leqq (1+\theta)n_h$, $m \neq n_h$ è verificata la disuguaglianza (singolarmente per ogni coefficiente)

$$\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) \geqq -\frac{1}{2\theta n_h}\exp(|m-n_h|^2/n_h) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})$$

e, in questo modo, risulta ampliato il campo di abitrarietà pei coefficienti a_m e generalizzato il teorema classico ricordato al n. 1.

(V_3) *Esistono* $\{n_h\}$, $\{\gamma_n\}$, $0 < \theta < 1$, *come in* (V_1) *e una successione* $\{\varepsilon_h\}$ *tali che sia*

$$\text{(3.5)} \qquad \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \quad \{\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \to 1$$

$$\text{(3.6)} \quad \begin{cases} \operatorname{Re}((a_{n_h-u} + a_{n_h+u})e^{-i\gamma_h}) \geqq -2\exp(\varepsilon_h n_h) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) \\ \qquad (u = 1, 2, \ldots, [\theta n_h]) \end{cases}$$

e sul tratto ridotto

$$(I_h^*) \qquad (1-\tau_h)n_h < m \leqq (1+\tau_h)n_h, \qquad \tau_h = \sqrt{\varepsilon_h + \log(2\theta n_h)/n_h}$$

si verifica per $m = n_h \pm u (\neq n_h)$

$$\text{(3.7)} \qquad \operatorname{Re}((a_{n_h-u} + a_{n_h+u})e^{-i\gamma_h}) \geqq 0.$$

Osservazione. Posto $\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) = \exp(\alpha_h n_h)$, per la seconda delle (3.5) risulta $\alpha_h \to 0$. D'altronde

$$\operatorname{Re}((a_{n_h-u} + a_{n_h+u})e^{-i\gamma_h}) \geqq -|a_{n_h-u} + a_{n_h+u}| \geqq -\exp(\eta_h n_h)$$

e per η_h si assuma il minimo possibile in guisa che questa valga per $u = 1, 2, \ldots, \theta n_h$, cioè si ponga

$$\operatorname*{Max}_u |a_{n_h-u} + a_{n_h+u}| = \exp(\eta_h n_h);$$

denotiamo con A_h il massimo di $|a_m|^{1/m}$, $((1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h$, $m \neq n_h)$ e allora $\overline{\lim}\, A_h \leqq 1$ ed è (il doppio segno corrisponde ad $A_h \geqq 1$ ed $A_h \leqq 1$)

$$|a_{n_h-u} + a_{n_h u}|^{1/n_h} \leqq |A_h^{n_h-u} + A_h^{u+n_h}|^{1/n_h} \leqq$$
$$\leqq (2A_h^{n_h \mp u})^{1/n_h} \leqq 2^{1/n_h} A_h^{1\pm\theta}.$$

Essendo 1 il raggio di convergenza dell'elemento analitico risulta $\overline{\lim}\, \eta_h \leqq 0$. Ne segue che a soddisfare la (3.6) basta assumere ε_h per il quale si ha

$$2 \exp(\varepsilon_h n_h + \alpha_h n_h) \geqq \exp(\eta_h n_h)$$

e per tale ε_h risulta

$$\varepsilon_h \geqq \eta_h - \alpha_h - \log 2/n_h$$

e pertanto si può scegliere $|\varepsilon_h|$ in guisa da avere $\overline{\lim}\, \varepsilon_h \leqq 0$. Questa relazione di limite ci mostra in particolare che $\tau_h/n_h \to 0$ e che il tratto (I_h^*) ha effettivamente l'ordine di grandezza ridotto.

Da questa condizione sufficiente (V_3) si ricava come corollario il seguente teorema nel quale si suppongono complessivamente limitati i rapporti dei coefficienti a_m del tratto I_h al coefficiente a_{n_h} centrale del tratto stesso: anzi, più in generale, la limitazione si assumerà unilaterale e riguarderà le componenti lungo l'orientazione $\gamma_h (h = 1, 2, \ldots)$

TEOREMA. – *L'elemento analitico* $\Sigma a_n z^n$ *abbia raggio di convergenza* 1. *Il punto* 1 *è critico se esistono due successioni* $\{n_h\}$ *e* $\{\gamma_h\}$ *e un numero reale* $0 < \theta < 1$, *tali che*

$$\text{(3.5)} \qquad \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \qquad |\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})|^{1/n_h} \to 1$$

$$\text{(3.8)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}((a_{n_h-u} + a_{n_h+u}) e^{-i\gamma_h}) \geqq -\dfrac{1}{\theta} \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) \\ \qquad\qquad (u = 1, 2, \ldots, [\theta . n_h]). \end{array} \right.$$

e sul tratto ridotto

$$(I_h^*) \qquad (1-\tau_h)n_h \leqq m \leqq (1+\tau_h)n_h, \qquad \tau_h = \sqrt{\log n_h / n_h}$$

si verifica

$$\text{(3.9)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}((a_{n_h-u} + a_{n_y-u}) e^{-i\gamma_h}) \geqq 0 \\ \qquad\qquad (u = 1, 2, \ldots, [\tau_h n_h]). \end{array} \right.$$

Le ipotesi di questo teorema sono verificate se l'elemento analitico $\Sigma a_n z^n$ ha i coefficienti complessivamente limitati cioè $|a_n| \leqq$

$\leqq K$ ed è $\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > \alpha (> 0$ fisso) e inoltre sussistono le (3.9).

Questo teorema si ottiene come evidente conseguenza di quello precedente osservando che nel nostro caso $\varepsilon_h = \log(1/(2\theta))/n_h$ e che

$$\varepsilon_h + \log(2\theta n_h)/n_h = \log n_h/n_h.$$

4. Dimostrazioni. *a*) La condizione (V_1) implica la (V_2) che è più generale: per ciò che riguarda la (3.3) vedi alla fine del comma *b*).

b) Veniamo a dimostrare la sufficenza di (V_2). Consideriamo la classica somma di E. FABRY nella forma che si trova in E. LANDAU [5]

$$S_h(\theta) = \sum_{m \in I_h} c_{n_h, m} \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) \tag{4.1}$$

$$c_{n,m} = \frac{n!\,n!}{m!\,(2n-m)!} = \frac{n!\,n!}{(n-u)!\,(n+u)!}, \quad m = n \pm u$$

$$I_h \equiv (1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h.$$

che si può scrivere

$$S_h(\theta) = \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) + \sum_{u=1}^{[n_h\theta]} c_{n_h, n_h+u} \cdot \operatorname{Re}((a_{n_h-u} + a_{n_h+u})e^{-i\gamma_h}) \tag{4.2}$$

e valutiamo il coefficiente $c_{n, n\pm u}$. Applichiamo la formula di STIRLING

$$\log(n!) = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} + \sigma_n,$$

$$\sigma_n \sim 1/(12\,n) \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

e poniamo provvisoriamente $u = \tau n$ pensando $0 < \tau \leqq \theta \leqq 1/2$; si ricava immediatamente

$$\log c_{n, n\pm u} = -n\log(1-\tau^2) - u\log\frac{1+\tau}{1-\tau}$$
$$-\frac{1}{2}\log(1-\tau^2) + \sigma_{n,u}$$

dove

$$\sigma_{n,u} = 2\sigma_n - \sigma_{n+u} - \sigma_{n-u} \sim -\frac{\tau^2}{6n(1-\tau^2)}$$

Lo sviluppo mediante la serie logaritmica ci dà

$$\log c_{n, n\pm u} = -\frac{u^2}{n} - \frac{u^4}{6n^3} - \dots - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right) + \sigma_{n,u}$$

(5) Ved. E. LANDAU, loc. cit. in (1), p. 77.

e, per n abbastanza grande otteniamo la maggiorazione

$$c_{n,\,n\pm u} < \exp(-u^2/n)/\sqrt{1-u^2/n^2} \leqq \exp(-u^2/n)/\sqrt{1-\theta^2}. \tag{4.3}$$

Consideriamo la somma Σ al secondo membro di (4.2) scritta per $S_h(\theta')$, cioè ottenuta sostituendo a θ un numero θ' tale che $0 < \theta' < \theta\sqrt{1-\theta^2}$; nel tratto più ristretto $(1-\theta')n_h \leqq m \leqq (1+\theta')n_h$ è ancora verificata la (3.4) col coefficiente θ e la maggiorazione (4.3) del coefficiente $c_{n,\,n\pm u}$ unita alla (3.4) ci dice che questa somma è maggiore di

$$-\sum_{u=1}^{[\theta' n_h]} \frac{\exp(-u^2/n_h)}{\sqrt{1-\theta^2}} \cdot \frac{1}{\theta n_h} \exp(u^2/n_h) \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})$$

che semplificata risulta

$$-\frac{[\theta' n_h]}{\theta\sqrt{1-\theta^2}\, n_h} \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > -\frac{\theta'}{\theta\sqrt{1-\theta^2}} \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})$$

Dalla (4.2) otteniamo

$$S_h(\theta') > \left(1 - \frac{\theta'}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\right) \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})$$

dove il coefficiente al secondo membro è positivo fisso (indipendente da h). Elevando a potenza $1/n_h$ tenendo presente l'ipotesi (3.1)

$$\overline{\lim}\, | S_h(\theta') |^{1/n_h} \geqq 1. \tag{4,4}$$

In base a un lemma classico ([6]) il punto 1 risulta singolare e la sufficienza di (V_2) è dimostrata.

Per ciò che riguarda la (3.3) osserviamo che essa porta come conseguenza

$$S_h(\theta) \geqq \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) - \Sigma_h^- \geqq \theta \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})$$

e vale ancora la (4.4) e ne segue l'asserto:

c) La sufficienza di (V_3) segue subito dall'Osservazione fatta alla fine del n. 2. Infatti consideriamo il tratto $\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})$, $(1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h$, di numeri reali; la prima delle (3.5) e le (3.6) sono rispettivamente la (2.9) e le (2.10) ove si ponga $n = n_h$ e $\varepsilon = \varepsilon_h$ e pertanto la (2.7) si traduce in $u \geqq \tau_h n_h$ dove τ_h è assegnato dalla (I_h^*).

([6]) Ved. E. LANDAU, loc. cit. in ([5]).

Il tratto centrale I_h^* risulta sopraemisimmetrico e quindi tutto I_h risulta ψ-sopraemisimmetrico e siamo ricondotti alla (V_2).

5. La condizione per la linea $|z| = 1$ critica. Condizioni sufficienti per la non prolungabilità dell'elemento analitico si ottengono come corollari dai teoremi del n. 3 dando a loro una forma indipendente da $\arg a_n$.

TEOREMA. – *L'elemento analitico* $\Sigma a_n z^n$ *abbia raggio di convergenza* 1. *La circonferenza* $|z| = 1$ *è linea critica se*

(H_1) *esistono*

(i) *una successione* $\{n_h\}$ *crescente di indici interi* $n_1, n_2, ...$

(ii) *un numero reale* $0 < \theta < 1$

tali che $|a_{n_h}|^{1/n_h} \to 1$ *per* $h \to +\infty$ *e i coefficienti* a_m *di ogni tratto*

$$(I_h) \qquad (1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h$$

per $m \neq n_h$, *soddisfino alla condizione*

$$|a_m| < \frac{1}{2\theta n_h} \exp\left((m-n_h)^2/n_h\right) \cdot |a_{n_h}| .$$

Quando si assume $\gamma_h = \arg a_{n_h}$ questa ultima disuguaglianza porta come conseguenza la validità della condizione unilaterale (3.4).

Alla condizione (H_1) si possono sostituire le due seguenti (H_2) e (H_3) più particolari:

(H_2) *esistono* $\{n_h\}$, $0 < \theta < 1$, $\{\varepsilon_h\}$ *tali che*

$$|a_{n_h}|^{1/n_h} \to 1, \quad \text{per} \quad h \to +\infty$$

$$|a_{n_h \pm u}| \leqq \exp(\varepsilon_h n_h)\, |a_{n_h}|, \qquad (u = 1, 2, ..., [\theta n_h])$$

$$a_{n_h \pm u} = 0, \quad (u = 1, 2, ..., [\tau_h n_h]), \qquad \tau_h = \sqrt{\varepsilon_h + \log(2\theta n_h)/n_h}.$$

Poichè $\tau_h \to 0$, l'ultima condizione riguarda un tratto ridotto.

(H_3) *esistono* $\{n_h\}$, $0 < \theta < 1$, $\alpha > 0$, $K > 0$ *tali che*

$$|a_n| \leqq K, \quad (n = 1, 2, 3, ...), \qquad |a_{n_h}| > \alpha, \quad (h = 1, 2, 3, ...)$$

$$a_{n_h \pm u} = 0, \quad (u = 1, 2, ..., [\tau_h n_h]), \qquad \tau_h = \sqrt{\log n_h / n_h},$$

Una condizione del tipo (H_3), ma lievemente meno restrittiva di questa, si trova in F. LÖSCH [7]: noi l'abbiamo ottenuta come conseguenza della (V_3) che, per la generalità, si avvantaggia della emisimmetria e la generalità di questo tipo non sembra conseguibile col procedimento di questo autore.

[7] F. LÖSCH, loc. cit. in [3]