
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FABIO CONFORTO

**Complemento ad una ricerca sopra i
sistemi lineari di integrali semplici di
prima specie con periodi ridotti sopra una
varietà di Picard.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 9
(1954), n.2, p. 119–125.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_119_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_119_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Complemento ad una ricerca sopra i sistemi lineari di integrali semplici di prima specie con periodi ridotti sopra una varietà di Picard.

Nota di FABIO CONFORTO † (a Roma) ⁽¹⁾

Sunto. - *Si completa una dimostrazione, a cui è dedicato un precedente lavoro dell'A., sull'esistenza di sistemi irregolari (non banali) di integrali semplici di prima specie con periodi ridotti sopra una varietà di PICARD.*

1. Si consideri sopra una varietà di PICARD a p dimensioni V_p il sistema lineare Σ, ∞^{p-1} , dei differenziali picardiani di prima specie, individuato da p tra essi linearmente indipendenti, siano $u_1, u_2, \dots, u_p$, che penseremo come elementi di un p -complesso verticale u ; e sia ω la matrice dei periodi dei differenziali u lungo $2p$ cicli lineari linearmente indipendenti sopra V_p . Com'è noto, la matrice ω , a p righe e $2p$ colonne, è una matrice di RIEMANN di genere p . Entro il sistema Σ si scelgano ora q differenziali linearmente indipendenti ($1 \leq q \leq p$), i quali individueranno un sistema lineare Σ_q, ∞^{q-1} , contenuto in Σ ; i q differenziali si po-

(¹) Il prof. FABIO CONFORTO è scomparso immaturamente in Roma il 24 febbraio 1954. Durante la sua infermità, che non attenuò la fervida attività del suo pensiero, Egli dettò il testo di una ricerca dal titolo *Sopra i sistemi lineari di integrali semplici di prima specie con periodi ridotti sopra una varietà di Picard*, che è in corso di stampa nell'Archiv der Mathematik (volume dedicato ad ALEXANDER OSTROWSKI nel suo 60° compleanno).

Il presente lavoro, già annunciato nel precedente del quale fa parte integrante, è stato da me redatto sulla traccia delle indicazioni da Lui stesso avute.

(MARIO ROSATI)

tranno ritenere elementi di un q -complesso verticale λu ($\lambda^{(q, 2p)}$ matrice complessa di caratteristica q), ed i corrispondenti periodi lungo i $2p$ cicli di V_p saranno forniti dalla matrice $\lambda\omega$, che è del tipo $(q, 2p)$. Quando sia verificata una relazione del tipo:

$$(1.1) \quad \lambda^{(q, p)} \omega^{(p, 2p)} = \mu^{(q, r)} L^{(r, 2p)}$$

con r intero non superiore a $2p$, μ matrice ad elementi complessi ed L ad elementi interi e non sia contemporaneamente verificata una relazione analoga per un valore minore di r , si dirà che Σ_q è un sistema lineare di differenziali semplici di prima specie con r periodi ridotti; lo si indicherà con $\Sigma_{q; r}$.

Nel lavoro [1] ⁽¹⁾ si trovano stabilite alcune proprietà generali dei sistemi $\Sigma_{q; r}$ tra le quali qui ricordiamo:

a) l'esistenza di un $\Sigma_{q; r}$ relativo ad una data ω è una proprietà invariante per *equivalenza*, anzi per *isomorfismo*, tra matrici di RIEMANN (nel senso di SCORZA); ricordando il significato geometrico delle relazioni di equivalenza e di isomorfismo ne segue che il possesso di un $\Sigma_{q; r}$ per una varietà di PICARD V_p è una proprietà che permane sostituendo alla V_p una varietà di PICARD che sia una sua trasformata *birazionale*, o anche soltanto *razionale*;

b) in rapporto ad un $\Sigma_{q; r}$ le matrici $\mu^{(q, r)}$ ed $L^{(r, 2p)}$ che compaiono nella relazione (1.1) hanno la caratteristica rispettivamente uguale a q ed r ;

c) per ogni $\Sigma_{q; r}$ si ha $r \geq 2q$.

Lo studio dei sistemi $\Sigma_{q; r}$ è stato finora sviluppato nella letteratura matematica nell'ipotesi $r = 2q$ (*sistemi regolari*); in [1] viene affrontata per la prima volta la questione dell'esistenza di sistemi $\Sigma_{q; r}$ con $r > 2q$ (*sistemi irregolari*). La risposta a tale questione è affermativa perchè, oltre a sistemi irregolari che possono banalmente presentarsi per ogni matrice di RIEMANN (cfr. [1], n. 6), esistono anche dei sistemi irregolari non banali, che cioè si presentano solo per matrici di RIEMANN *particolari*.

Nel n. 8 di [1] si costruisce infatti un esempio di una matrice di RIEMANN ω , di genere $p = 3$, che possiede un $\Sigma_{1; 3}$ (sistema irregolare costituito da un solo differenziale con tre periodi) effettivamente tale, cioè non riducibile ad un $\Sigma_{1; 2}$; perchè l'esempio sia veramente non *banale* è necessario però che la matrice ω sia in effetti *particolare*, talchè esistano anche matrici di RIEMANN di genere 3 *prive di sistemi* $\Sigma_{1; 3}$. La dimostrazione di quest'ulti-

(²) I numeri tra parentesi quadrata si riferiscono alla bibliografia che si trova al termine della nota.

ma circostanza, che dà all'esempio ricordato tutto il suo valore, è stata espressamente differita in [1] per ragioni di spazio, e viene presentata in questa nota.

2. Sia ω una qualunque matrice di RIEMANN di genere 3 che potremo supporre, a meno di un isomorfismo, nella forma normale

$$(2.1) \quad \omega = || U \quad \Omega ||$$

dove U è la matrice unità del terzo ordine ed $\Omega = \Omega_{-1}$ è una matrice simmetrica del terzo ordine, i cui elementi $\omega_{hk} = \omega_{kh}$ possono essere numeri complessi qualunque ($\omega_{hk} = \omega'_{hk} + i\omega''_{hk}$), purchè soddisfacenti un numero finito di disuguaglianze, le quali esprimono che la matrice degli ω''_{hk} è definita positiva: $|| \omega''_{hk} || > 0$. Com'è ben noto, nello spazio euclideo complesso a 6 dimensioni S_6 in cui siano coordinate le ω_{hk} ($h \leq k$) i punti rappresentativi di siffatte Ω riempiono un continuo a 12 dimensioni reali (ogni punto che rappresenti una tale Ω è centro di un intorno completo i cui punti rappresentano tutti Ω analoghe); essi possono anche assumersi a rappresentare geometricamente le matrici di RIEMANN ω date dalla (2.1).

Ciò premesso, facciamo l'ipotesi che la ω possenga un $\Sigma_1;_3$, cioè soddisfi una relazione del tipo della (1.1), riferita al caso $p=3$, $q=1$, $r=3$:

$$(2.2) \quad \lambda^{(1, 3)} \omega^{(2, 6)} = \mu^{(1, 3)} L^{(3, 6)}$$

con μ ed L aventi caratteristica rispettivamente 1 e 3, essendo inoltre la L intera. Posto

$$(2.3) \quad L^{(3, 6)} = || L_1^{(2, 3)} L_2^{(3, 3)} ||$$

e tenuto conto della (2.1), la (2.2) equivale alle due uguaglianze:

$$\lambda = \mu L_1 \quad \lambda \Omega = \mu L_2.$$

Da queste, eliminando λ , segue la relazione:

$$\begin{aligned} \mu L_1 \Omega &= \mu L_2 \\ \mu (L_1 \Omega - L_2) &= 0 \end{aligned}$$

la quale, avendo μ caratteristica massima ($=1$), può essere soddisfatta soltanto se la matrice $L_1 \Omega - L_2$ è degenere, cioè se:

$$(2.4) \quad | L_1 \Omega - L_2 | = 0.$$

La (2.4), quando non svanisca identicamente, è un'equazione

algebrica a coefficienti interi nelle ω_{hk} (L_1 ed L_2 sono intere) che vincola la scelta della Ω se si vuole che sia soddisfatta la (2.2). L'esistenza della relazione (2.2) per la matrice ω implica cioè una *particolarità* per la Ω , e quindi per la ω stessa.

Nello spazio S_6 sopra considerato la (2.4) rappresenta un'ipersuperficie algebrica F sulla quale si dovrà trovare il punto immagine di una matrice di RIEMANN ω soddisfacente la (2.2).

Comunque possano variare L_1 , L_2 tra le matrici intere del terzo ordine, la F descriverà una infinità numerabile (al più) di ipersuperficie dell' S_6 , infinità che non invade certamente lo spazio ambiente, cosicchè esisteranno dei punti di S_6 non appartenenti ad alcuna delle F . Ciò in base ad un teorema di SCORZA ⁽³⁾ il quale afferma di più che ogni punto dell' S_6 è di accumulazione di punti situati fuori di tutte le F .

Questa circostanza si esprime dicendo che un punto *generico* dell' S_6 non appartiene ad alcuna ipersuperficie F . Notiamo però esplicitamente che l'uso dell'attributo *generico* è qui più ampio di quello corrente nella geometria algebrica; con esso si esprime infatti che il punto è fuori di una infinità numerabile (anzichè di un numero finito) di varietà algebriche subordinate all'ambiente; esso è per altro pienamente giustificato proprio dal ricordato teorema di SCORZA (cfr. ancora [2], cap. I, n. 20).

Per avere dunque una matrice di RIEMANN di genere 3 che non soddisfi alcuna relazione come la (2.2), basta scegliere il suo punto rappresentativo P nello spazio S_6 in modo che sia *generico* e soddisfi naturalmente le disuguaglianze $\|\omega''_{hk}\| > 0$; all'uopo si può scegliere P genericamente nell'intorno di un qualunque punto che rappresenti una matrice di RIEMANN.

Con riguardo al teorema di SCORZA potremo anche dire: *una matrice di RIEMANN di genere 3, che sia generica, non soddisfa alcuna relazione del tipo (2.2), ed è pertanto priva di sistemi $\Sigma_{1;3}$.*

Questa conclusione vale nella tacita ammissione che l'equazione (2.4), proveniente dalla (2.2), non sia in alcun caso soddisfatta da tutte le $\Omega = \Omega_{-1}$, per cui $\|\omega''_{hk}\| > 0$; e si osserverà che se la (2.4) è soddisfatta da tutte le Ω siffatte, essa è soddisfatta da una qualunque $\Omega = \Omega_{-1}$, cioè la corrispondente ipersuperficie F in S_6 svanisce (un'ipersuperficie che sia identica nell'intorno completo di un punto, è identica in tutto il suo spazio ambiente).

Ma nelle nostre condizioni l'equazione (2.4) non si riduce mai ad una identità nella Ω . Per chiarire anche quest'ultimo punto dimostreremo nel prossimo n. 3 il seguente

(3) Dimostrato in [3] p. II, § 13. Cfr. anche [2], cap. I, n. 20

TEOREMA: Se A e B sono due date matrici complesse di ordine $p \geq 1$, affinché la relazione:

$$|AZ + B| = 0$$

sia soddisfatta da ogni matrice complessa simmetrica $Z = Z_{-1}$ di ordine p , è necessario e sufficiente che la matrice a p righe e $2p$ colonne:

$$\| A \quad B \|$$

abbia caratteristica minore di p .

Osserviamo subito che questo teorema, in un caso particolare, serve al nostro scopo; infatti, quando sia $p=3$, $A = L_1$, $B = -L_2$, $Z = \Omega$, esso afferma che l'equazione (2.4) è identica nella Ω se e solo se la matrice $\| L_1 \quad -L_2 \|$ ha caratteristica < 3 , cioè, in termini equivalenti, se e solo se la matrice $\| L_1 \quad L_2 \| = L$ (cfr. (2.3)) ha caratteristica < 3 . Ma questa circostanza non può verificarsi poichè, come abbiamo ricordato nel n. 2, la matrice L che compare nella (2.2) ha sempre caratteristica 3. La (2.4) dunque non si riduce mai ad una identità; è ciò basta ad avvalorare la conclusione di questa nota.

3. Ecco la dimostrazione del teorema enunciato nel n. 2.

Scelte, com'è possibile, due matrici non degeneri Q ed R di ordine p in modo che sia (con chiaro significato dei simboli):

$$(3.1) \quad QAR = A' = \begin{vmatrix} U^{(\rho, \rho)} & O^{(\rho, p-\rho)} \\ O^{(p-\rho, \rho)} & O^{(p-\rho, p-\rho)} \end{vmatrix}$$

dove ρ è la caratteristica di A , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} AZ + B &= Q^{-1}A'R^{-1}ZR_{-1}^{-1}R_{-1} + Q^{-1}QBR_{-1}^{-1}R_{-1} = \\ &= Q^{-1}(A'R^{-1}ZR_{-1}^{-1} + QBR_{-1}^{-1})R_{-1} = Q^{-1}(A'Z' + B')R_{-1} \end{aligned}$$

avendo posto:

$$(3.2) \quad Z' = R^{-1}ZR_{-1}^{-1} = Z'_{-1}$$

e

$$(3.3) \quad B' = QBR_{-1}^{-1}.$$

Da cui segue, per la natura di Q ed R , l'equivalenza delle due relazioni:

$$(3.4) \quad |AZ + B| = 0$$

$$(3.5) \quad |A'Z' + B'| = 0.$$

Si osservi pure che dall'uguaglianza in matrici, equivalente

alle (3.1), (3.3),

$$Q \| A \quad B \| \left\| \begin{matrix} R & O \\ O & R_{-1}^{-1} \end{matrix} \right\| = \| A' \quad B' \|$$

risulta che le due matrici $\| A \quad B \|$ ed $\| A' \quad B' \|$ hanno la medesima caratteristica, essendo non degeneri la Q e la $\left\| \begin{matrix} R & O \\ O & R_{-1}^{-1} \end{matrix} \right\|$.$$

Ciò premesso è chiaro che se la relazione (3.4) è valida per ogni $Z = Z_{-1}$, anche la relazione (3.5) è valida per ogni $Z' = Z'_{-1}$ e *viceversa*; infatti, per la (3.2), quando Z percorre la totalità delle matrici complesse simmetriche di ordine p altrettanto accade di Z' e *viceversa*, e ciò qualunque sia la R non degenera.

Queste osservazioni ci autorizzano a dimostrare il teorema con riferimento alla (3.5), o anche alla (3.4) (per omettere gli apici) nell'ipotesi che la A abbia la forma canonica (3.1). In quest'ipotesi, posto $B = \| b_{hk} \|$, il determinante $|AZ + B|$ si scrive esplicitamente:

$$(3.6) \quad |AZ + B| = \begin{vmatrix} z_{11} + b_{11} & z_{12} + b_{12} & \dots & z_{1p} + b_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{\rho 1} + b_{\rho 1} & z_{\rho 2} + b_{\rho 2} & \dots & z_{\rho p} + b_{\rho p} \\ b_{\rho+1, 1} & b_{\rho+1, 2} & \dots & b_{\rho+1, p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pp} \end{vmatrix}.$$

Supponiamo in primo luogo che l'equazione (3.4) sia identica in Z . Sviluppando il determinante (3.6) che compare a primo membro della (3.4), si ottiene un polinomio nelle $z_{hk} = z_{kh}$ di grado non superiore a p che dovrà avere nulli tutti i coefficienti dei vari termini nelle z_{hk} . Ciò porta in primo luogo $\rho < p$; se infatti fosse $\rho = p$, cioè $A = U$, il termine $z_{11}z_{22} \dots z_{pp}$ comparirebbe nello sviluppo del determinante con coefficiente non nullo (anzi uguale ad 1). Escluso anche l'altro caso estremo $\rho = 0$ in cui, essendo $A = O$, il teorema è di immediata evidenza, supponiamo $0 < \rho < p$ e pensiamo di sviluppare il determinante (3.6) con la regola di LAPLACE applicata alle sue prime ρ orizzontali. Il generico minore di ordine ρ da esse estratto, formato con le colonne di posto $i_1, i_2, \dots, i_\rho$, sia $M_{i_1 i_2 \dots i_\rho}$, andrà moltiplicato per il minore complementare di ordine $p - \rho$ estratto dalle ultime $p - \rho$ orizzontali, relativo alle colonne di posto $j_1, j_2, \dots, j_{p-\rho}$ (essendo $i_1, i_2, \dots, i_\rho, j_1, j_2, \dots, j_{p-\rho}$ una permutazione degli interi $1, 2, \dots, p$); quest'ultimo minore, che non

dipende dalle z_{hk} ma solo dalle b_{hk} , lo indicheremo con $B_{j_1, j_2, \dots, j_{p-\rho}}$.

In relazione ad una scelta degli indici $i_1, i_2, \dots, i_\rho$, che supporremo ordinati per valori crescenti, sia $l(0 \leq l \leq \rho)$ il numero di quelli fra essi che non superano ρ , cosicchè sarà $i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq \rho < i_{l+1} < \dots < i_\rho$; si considerino inoltre $\rho - l$ interi $k_1 < k_2 < \dots < k_{\rho-l}$ tali che $i_1, i_2, \dots, i_l, k_1, k_2, \dots, k_{\rho-l}$ sia una permutazione degli interi $1, 2, \dots, \rho$.

Ciò premesso, il termine di grado ρ

$$z_{i_1, i_1} z_{i_2, i_2} \dots z_{i_l, i_l} z_{k_1, i_{l+1}} z_{k_2, i_{l+2}} \dots z_{k_{\rho-l}, i_\rho}$$

è contenuto unicamente nel minore $M_{i_1 i_2 \dots i_\rho}$ ed ha come coefficiente nello sviluppo del determinante (3.6) il valore numerico di $B_{j_1 j_2 \dots j_{p-\rho}}$. Ma questo, essendo per ipotesi il determinante (3.6) identicamente nullo rispetto alle z_{hk} , implica che sono degeneri tutti i minori $B_{j_1 j_2 \dots j_{p-\rho}}$, che sono poi tutti i minori di ordine $p - \rho$ estratti dalle ultime $p - \rho$ orizzontali della matrice B . Se si tiene conto della forma (3.1) di A si conclude così che la matrice $\|A \ B\|$ ha caratteristica $< p$, il che dimostra la prima parte del teorema (necessità).

La seconda parte (sufficienza), quantunque non sia essenziale per la nostra applicazione, è ormai facile a conseguirsi.

Nell'ipotesi che la matrice $\|A \ B\|$ abbia caratteristica $< p$, la caratteristica ρ della matrice A sarà intanto $< p$; e se fosse $\rho = 0$ (cioè $A = 0$) rimarrebbe $|B| = 0$ e il teorema sarebbe banalmente verificato. Quando poi $0 < \rho < p$ l'ipotesi fatta su $\|A \ B\|$ porta manifestamente, tenuto conto della forma (3.1) di A , che tutti i minori di ordine $p - \rho$ estratti dalle ultime $p - \rho$ orizzontali di B , cioè i minori $B_{j_1 j_2 \dots j_{p-\rho}}$, sono degeneri. Ripensando allora allo sviluppo del determinante (3.6) più sopra preso in esame, si conclude immediatamente che esso è nullo per ogni scelta delle z_{hk} , come appunto si voleva.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. CONFORTO, *Sopra i sistemi lineari di integrali semplici di prima specie con periodi ridotti sopra una varietà di Picard*, Archiv der Mathematik, volume dedicato ad ALEXANDER OSTROWSKI nel suo 60° compleanno (1954).
- [2] F. CONFORTO, *Funzioni abeliane modulari*, Vol. I, Corsi dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, Docet Edizioni universitarie, Roma (1951).
- [3] G. SCORZA, *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, vol. XLV (1921), pagg. 1-204.