Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Zappa

Sui piani grafici finiti h-l-transitivi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.1, p. 16–24.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_16_0>

Sui piani grafici finiti h-l-transitivi.

Nota di GUIDO ZAPPA (a Firenze).

Sunto. - *Si indica il modo di costruire, per via gruppale, tutti i piani grafici finiti che ammettono tutte le possibili omologie aventi l'asse coincidente con una retta data e il centro situato su di un'altra retta data.*

In un lavoro precedente [4] ho mostrato come si possano costruire tutti i possibili piani grafici finiti ammettenti un gruppo di collineazioni transitivo su tutti o quasi tutti i punti del piano, partendo dalla struttura del gruppo, e identificando i punti del piano con gli elementi del gruppo, o coi laterali di un certo sottogruppo, e le rette del piano con determinati sistemi di elementi, o di laterali, soddisfacenti a certe condizioni, e ho applicato il procedimento a vari casi, tra cui quello in cui il piano ammetta tutte le possibili omologie speciali aventi per asse una data retta.

In questa nota studio, sempre con lo stesso metodo, un altro caso notevole, quello in cui il piano ammette tutte le possibili omologie aventi per asse una data retta, l, ed aventi il centro situato sopra una data retta h, distinta da l (piano h-l-transitivo).

Mostro che il rango di un piano grafico finito h-l-transitivo è la potenza di un numero primo, e che ogni tale piano può costruirsi partendo da un gruppo G d'ordine $p^t(p^t-1)$ (p primo) che sia l'olomorfo di un gruppo abeliano elementare S d'ordine p^t secondo un sottogruppo, d'ordine p^t-1, dell'automorfo di S, semplicemente transitivo sugli elementi non identici di S.

Detti «punti» gli elementi di G, e «rette» i laterali di S e dei sottogruppi d'ordine p^t-1 di G, provo che tali punti e rette costituiscono un piano affine generalizzato (nel senso di PERMUTTI [3]), che può completarsi in un piano grafico di rango p^t, h-l-transitivo. Dimostro infine che il piano così ottenuto è desarguesiano se e solo se H è ciclico, e do un esempio di piano h-l-transitivo non desarguesiano.

1. Diremo, con R. BAER [1], *piano* h-l-*transitivo* un piano grafico in cui sian date due rette distinte h ed l, tali che, comunque si prendano un punto U di h e due punti P, P' (distinti o coincidenti) diversi da U, non situati su l, e allineati con U, esiste un'omologia di centro U ed asse l, che porti P in P'.

Evidentemente, come si vede ragionando in modo analogo a quello dei piani desarguesiani, una tale omologia, se esiste, è unica.

Tutte le possibili omologie di asse l, aventi il centro su h, formano un gruppo G, perchè il prodotto di due tali omologie è una collineazione avente ancora l come retta di punti uniti, quindi è ancora un'omologia di asse l, e inoltre ha ancora h come retta unita, onde ha il centro su h. Fissato un punto P del piano, non situato nè su l, nè su h, si ha che, comunque si scelga un punto P' del piano, non situato nè su l, nè su h, esiste una ed una sola omologia appartenente a G, che porti P in P'. Infatti, se $P'=P$, tale omologia è necessariamente l'identità, mentre se P' è distinto da P, una tale omologia deve avere il centro nel punto U comune alle rette h e PP': e sappiamo già che esiste una ed una sola omologia di centro U ed asse l, che porti P in P'.

Pertanto, l'ordine del gruppo G eguaglia, se il piano è finito, il numero dei punti del piano non situati nè su h, nè su l; se il piano è di rango n, l'ordine di G è $n^2 - n$.

Le omologie appartenenti a G, e aventi il centro nel punto comune ad l ed h, che diremo V_0 (omologie speciali) formano un sottogruppo S di ordine n, mentre le omologie appartenenti a G e aventi il centro in uno, U_i, dei rimanenti punti di h, formano un sottogruppo H_i d'ordine $n-1$. Inoltre, ogni elemento di G diverso dall'unità appartiene ad uno ed uno solo dei sottogruppi S, H_1, $H_2, \dots, H_n$. Ogni elemento di G il cui ordine divide n è in S, e viceversa, essendo n primo con $n-1$; onde S è un sottogruppo caratteristico di G. Inoltre, presi due diversi sottogruppi H_i, siano essi H_j ed H_r, e detti U_j, U_r i centri delle omologie appartenenti rispettivamente a H_j ed H_r, si ha che in S esiste una ed una sola omologia ω che porta U_j in U_r (poichè le omologie di S hanno il centro nel punto comune ad h ed l, il quale è allineato coi punti U_j ed U_r): pertanto le omologie del gruppo $\omega^{-1}H_j\omega$ devono avere il centro in $\omega(U_j) = U_r$, e quindi coincidono con le omologie di H_r. Si avrà quindi $\omega^{-1}H_j\omega = H_r$. Pertanto i sottogruppi H_i sono tutti coniugati tra loro, e due qualunque di essi sono trasformati l'uno nell'altro da un elemento di S. Essendo poi il loro numero eguale all'ordine, n, di S, si ha che l'unico elemento di S che trasforma un dato sottogruppo H_i in sè è l'identità.

Inoltre, un elemento non identico s di S non può essere permutabile con un elemento h non contenuto in S. Infatti, h è in uno ed uno solo dei sottogruppi H_i, sia esso H_j. Allora, se fosse $h = s^{-1}hs$, h sarebbe, oltre che in H_j, anche in $s^{-1}H_js$, il quale, per l'ultima osservazione, è distinto da H_j; onde H apparterrebbe a due diversi fra i sottogruppi H_ι, il che, come si è visto, non può essere.

Fissato un sottogruppo H_ι, si ha che, trasformando gli elementi di S con un elemento di H_ι, si ottiene un automorfismo di S, e che due diversi elementi, h' ed h'', di H_ι non possono produrre in S lo stesso automorfismo, altrimenti $h'^{-1}h''$ produrrebbe in S l'automorfismo identico, e quindi sarebbe permutabile con ogni elemento di S, contro l'ultima osservazione. Pertanto H_ι è isomorfo ad un sottogruppo H del gruppo di automorfismi di S. Inoltre ogni automorfismo di S appartenente ad H, diverso dall'automorfismo identico, sempre in base alla suddetta osservazione, non lascia fermo alcun elemento non identico di S, e due diversi automorfismi appartenenti ad H portano un qualunque elemento non identico di S in due elementi distinti.

Ne segue che, essendo il numero, $n-1$, degli elementi non identici di S eguale all'ordine di H, un dato elemento non identico di S è portato dagli $n-1$ automorfismi appartenenti ad H in tutti gli $n-1$ elementi non identici di S. Pertanto tutti gli elementi non identici di S hanno lo stesso ordine, onde l'ordine di S è una potenza di un numero primo p, sia essa p^t, ed ogni suo elemento non identico ha ordine p. Inoltre S è abeliano, altrimenti il suo centro sarebbe un sottogruppo proprio, e quindi un elemento non identico del centro dovrebbe essere portato da qualche automorfismo di S in un elemento non contenuto nel centro, il che è assurdo. Di conseguenza S è un gruppo abeliano elementare d'ordine p^t (p primo).

Concludiamo pertanto col seguente teorema:

Se Π *è un piano grafico* h-l-*transitivo finito di rango* n, *il gruppo* G *delle omologie di* Π *di asse* l, *col centro su* h, *è l'olomorfo di un gruppo abeliano elementare* S *d'ordine* $n = p^t$ (p *primo*) *secondo un sottogruppo d'ordine* $p^t - 1$ *dell'automorfo di* S, *i cui elementi non lascino fisso alcun elemento non identico di* S.

2. Proviamo che, viceversa:

Se S *è un gruppo abeliano elementare d'ordine* $n = p^t$ (p *primo*, $n > 2$) *e* G *è l'olomorfo di* S *secondo un sottogruppo* H *d'ordine* $p^t - 1$ *dell'automorfo di* S, *i cui elementi non lascino fermo alcun elemento non identico di* S, *gli elementi di* G *possono considerarsi come punti di un piano affine generalizzato* Π^* *le cui rette sono date dai laterali di* S *e da quelli di* p^t *sottogruppi di* G *isomorfi ad* H. *Inoltre* Π^* *può essere ampliato, mediante l'aggiunta dei punti di due nuove rette* h *ed* l, *in un piano grafico* h-l-*transitivo* *di rango* n = p^t, *in cui il gruppo delle omologie di asse* l *e centro situato su* h *è isomorfo a* G.

Diremo, con PERMUTTI [3] *spazio affine generalizzato* l'ente che si ottiene da uno spazio grafico sopprimendo un certo numero di sottospazi di questo. PERMUTTI stesso ha dimostrato (ibidem) che ogni insieme di elementi, detti punti, in cui siano definiti certi sottoinsiemi, detti rette, tali che: 1) ogni retta contenga almeno due punti, *b*) per due punti passi una ed una sola retta, *c*) due rette abbiano al più un punto in comune, *d*) esistano punti non appartenenti ad una medesima retta, è un piano affine generalizzato. Per dimostrare il nostro teorema, notiamo anzitutto che, per definizione di olomorfo, è $G = SH_1$, ove H_1 è isomorfo ad H, S è normale in G, e inoltre, trasformando S mediante gli elementi di H_1 si vengono a determinare in S gli automorfismi contenuti in H. Un elemento non identico s di S non può trasformare un elemento h di H_1 in un elemento contenuto ancora in H_1, perchè se fosse $s^{-1}hs = \bar{h}$ con $\bar{h}$ in H_1, si avrebbe $h^{-1}s^{-1}h = h^{-1}\bar{h}s^{-1}$, e pertanto $h^{-1}\bar{h}$ dovrebbe essere in S, e quindi essere l'identità, perchè S ed H_1 hanno a comune la sola identità; di conseguenza si avrebbe $\bar{h} = h$, onde h risulterebbe permutabile con s, il che è contro l'ipotesi che gli automorfismi contenuti in H non lascino fermo alcun elemento non identico di S. In particolare, s non può trasformare H_1 in sè, onde i coniugati di H_1 in G sono quanti gli elementi di S, cioè n: siano essi $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

Inoltre, due distinti tra tali sottogruppi hanno in comune la sola unità: se infatti, ad es., H_1 ed H_i avessero in comune un elemento non identico h, detto s un elemento di S che trasforma H_i in H_1, si avrebbe che $s^{-1}h\ s$ sarebbe ancora in H_1, mentre abbiamo visto che un elemento non identico di S non può trasformare un elemento non identico di H_1 in un elemento ancora in H_1.

Il numero degli elementi di G che appartengono o ad S o ad uno dei sottogruppi $H_1, H_2, \ldots, H_n$ è dato allora da $n + n(n \quad 2) = n(n-1)$, e quindi coincide con l'ordine di G. Pertanto G può decomporsi nella somma di S e dei sottogruppi $H_1, H_2, \ldots, H_n$, perchè ogni elemento di G appartiene o ad S o ad uno di detti sottogruppi.

Chiamiamo ora *punto* ogni elemento di G, e *retta* ogni laterale di S o di uno qualunque dei sottogruppi $H_1, H_2, \ldots, H_n$. È evidente che, essendosi supposto $n > 2$, ogni retta contiene almeno due punti, e che esistono almeno tre punti non allineati. Per provare che l'insieme Π^* dei punti così introdotti è un piano affine generalizzato, basta far vedere pertanto, in base al citato risultato di PERMUTTI, che:

a) per due punti passa una ed una sola retta,

b) due rette hanno al più in comune un punto.

Ma la *b*) è immediata conseguenza della *a*), perchè se due rette avessero a comune almeno due punti, per questi passerebbero due rette, contro la *a*). Basterà quindi dimostrare la validità di quest' ultima.

Presi ora due punti, cioè due elementi c e d di G, consideriamo l'elemento $cd^{-1} = m$. Si avrà che c e d appartengono allo stesso laterale di un dato sottogruppo M se e solo se m appartiene ad M. E poichè m, non essendo l'identità, appartiene ad uno ed uno solo dei sottogruppi $S, H_1, \ldots, H_n$, si ha che uno ed uno solo dei laterali dei sottogruppi $S, H_1, \ldots, H_n$ contiene insieme c e d. Pertanto per due punti di Π^* passa una ed una sola retta, e la *a*) risulta dimostrata. Ne segue che Π^* è un piano affine generalizzato.

Procediamo ora ad ampliare Π^* in modo da ottenere un piano grafico. Notiamo anzitutto che due rette costituite da due distinti laterali di uno stesso sottogruppo $S, H_1, \ldots, H_n$ non hanno alcun punto in comune. Aggiungiamo in primo luogo a Π^*, n nuovi punti $V_1, V_2, \ldots, V_n$, costituenti una nuova retta l, e imponiamo a V_i di appartenere alle rette costituite dai laterali di H_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. L'insieme $\overline{\Pi}$ di punti ottenuto ampliando in questo modo Π^* è un piano affine ordinario. Basterà a tal uopo mostrare che:

1) per due punti di $\overline{\Pi}$ passa una ed una sola retta,

2) dati una retta r di $\overline{\Pi}$, e un punto P di $\overline{\Pi}$ non situato su r, per P passa una ed una sola retta parallela ad r.

La 1) è immediata. Infatti, se i due punti dati appartengono ambedue a Π^*, la proprietà 1) discende dall'analoga che vale in Π^*; se uno dei due punti dati è in Π^*, e l'altro è su l, la 1) discende dal fatto che ogni elemento di G appartiene ad uno solo dei laterali di un dato sottogruppo scelto tra gli H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; se poi i due punti sono ambedue su l, questa è l'unica retta per essi.

Per provare la 2) notiamo anzitutto che ogni retta di $\overline{\Pi}$ contiene esattamente n punti. Infatti, se tale retta proviene da una retta di Π^* costituita da un laterale di S, i suoi punti sono tutti e soli gli n elementi di detto laterale; se essa proviene da un laterale di H_i (i essendo un intero compreso tra 1 ed n), i suoi punti sono gli $n-1$ elementi di detto laterale e il punto V_i; se poi essa coincide con l, è formata dagli n punti V_i. Invece, per un punto di $\overline{\Pi}$ passano $n+1$ rette. Infatti, se tale punto appartiene anche a Π^*, ed è quindi costituito da un elemento g di G, esso appartiene alle $n+1$ rette costituite dai laterali $Sg, H_1g, \ldots, H_ng$; se invece esso è un punto V_ι di l, per esso passano l e le n rette costituite dai laterali di H_ι.

Poichè per un punto di $\overline{\Pi}$ passano $n+1$ rette, mentre una retta di $\overline{\Pi}$ contiene n punti, si ha che, date una retta r e un punto P di $\overline{\Pi}$ non situato su r, per P deve passare, oltre alle n rette congiungenti P coi punti di r, anche una ulteriore retta, che risulta parallela ad r. La 2) è quindi dimostrata, e $\overline{\Pi}$ risulta essere un piano affine ordinario.

Ampliando $\overline{\Pi}$ mediante l'aggiunta di un'ulteriore retta h (retta impropria), si ottiene, come è ben noto, un piano grafico contenente $n+1$ punti su ogni retta, quindi di rango n, che diremo Π.

Resta ora da provare che Π possiede un gruppo di omologie, costituito da tutte le possibili omologie di asse l, col centro su h. Si consideri a tal fine, in corrispondenza a ciascun elemento g di G, la corrispondenza τ_g di Π^* in sè che porta il punto di Π^* dato dall'elemento x di G in quello dato da xg. Le $n(n-1)$ τ_g ottenute in corrispondenza agli $n(n-1)$ elementi g di G formano un gruppo Γ, isomorfo a G. La τ_g porta un laterale di un sottogruppo di G in un laterale dello stesso sottogruppo, quindi trasforma rette in rette, e porta una retta di Π^* che dia luogo ad una retta di Π contenente un dato punto V_ι di l, o non contenente alcun punto di l, in una retta di Π^* che dà luogo ad una retta di Π passante per lo stesso punto V_ι, o rispettivamente non passante per alcun punto di l. Pertanto τ_g può ampliarsi in una corrispondenza di $\overline{\Pi}$ in sè, che diremo ancora τ_g, che trasforma rette in rette, e per cui l è retta di punti uniti. Due rette di $\overline{\Pi}$ aventi un punto in comune sono portate da τ_g in due rette di $\overline{\Pi}$ aventi ancora un punto in comune, e di conseguenza rette di $\overline{\Pi}$ parallele tra loro sono portate da τ_g in rette di $\overline{\Pi}$ ancora parallele tra loro. Pertanto τ_g può ampliarsi in una corrispondenza di Π in sè che porti rette in rette, ed abbia l come retta di punti uniti e h come retta unita, vale a dire in una omologia di Π, di asse l e centro su h. E poichè le τ_g formano un gruppo isomorfo a G, d'ordine $n(n-1)$, e tale numero coincide con quello di tutte le possibili omologie di asse l e centro su h, il teorema risulta pienamente dimostrato.

Dal corso della dimostrazione risulta pure che:

Se, dato un piano Δ, h-l-*transitivo, si considera il gruppo* G *delle omologie di asse* l, *col centro su* h, *e, a partire da* G, *si costruisce, secondo il procedimento dell'ultimo teorema, un piano* Π h-l-*transitivo,* Δ *risulta isomorfo a* Π.

3. Mostriamo ora che *il piano* Π *di cui al teorema del* n. 2, *è desarguesiano se e solo se il gruppo* H *è ciclico.*

Sappiamo che H risulta isomorfo al gruppo delle omologie non speciali di Π di asse l, aventi il centro in un punto assegnato di h; ma tale gruppo, quando il piano è desarguesiano, è ciclico; pertanto, se Π è desarguesiano, H è ciclico.

Per provare che, viceversa, quando H è ciclico, Π è desarguesiano, occorre anzitutto dimostrare i seguenti lemmi.

I. – *Se* S *ed* S′ *sono due gruppi abeliani elementari d'ordine* p^t, *e se* φ, φ' *sono rispettivamente due automorfismi di* S *ed* S′, *ciascuno dei quali sia ciclico, abbia periodo* $p^t - 1$, *e permuti ciclicamente gli elementi non identici di* S *e rispettivamente di* S′, *si può stabilire un isomorfismo* ω *tra* S *ed* S′, *tale che, per ogni elemento* x *di* S, *si abbia* $\omega(\varphi(x)) = \varphi'(\omega(x))$.

Si supponga, a tal uopo, di aver scritto S ed S' sotto forma additiva. Scelti due elementi non identici e ed e', situati rispettivamente in S ed S', introduciamo per gli elementi non identici di S, ciascun dei quali può ovviamente, in base alle ipotesi, porsi sotto la forma $\varphi^i(e)$, una nuova operazione di prodotto, nel modo seguente: $\varphi^i(e)\varphi^j(e) = \varphi^j(\varphi^i(e)) = \varphi^{i+j}(e)$. Analogamente si proceda in S', ponendo $\varphi'^i(e)\varphi'^j(e) = \varphi'^j(\varphi'^i(e)) = \varphi'^{i+j}(e)$. Evidentemente, rispetto a tali operazioni, gli elementi non identici di S e di S' formano due gruppi ciclici. Si ha inoltre $[\varphi^i(e) + \varphi^j(e)]\varphi^k(e) = \varphi^k[\varphi^i(e) + \varphi^j(e)] = \\ = \varphi^k(\varphi^i(e)) + \varphi^k(\varphi^j(e)) = \varphi^i(e)\varphi^k(e) + \varphi^j(e)\varphi^k(e)$, e pertanto, rispetto alle operazioni di somma e prodotto anzi introdotte, S, e così S', sono due campi di Galois d'ordine p^t. Ma due campi di Galois dello stesso ordine possono farsi corrispondere in un isomorfismo che muti l'uno nell'altro due generatori dei gruppi moltiplicativi dei due campi, arbitrariamente scelti, e poichè $\varphi(e)$, $\varphi'(e')$ sono due generatori dei gruppi moltiplicativi dei nostri campi di Galois, esiste una corrispondenza ω tra S ed S' tale che:

$a)$ $\omega(a + b) = \omega(a) + \omega(b)$

$b)$ $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$

$c)$ $\omega(\varphi(e)) = \varphi'(e')$.

Dalle $b)$ e $c)$ segue che $\omega(\varphi(e)\varphi(e)) = \omega(\varphi(e))\omega(\varphi(e))$ cioè $\omega(\varphi(\varphi(e)) = \\ = \varphi'(e')\varphi'(e')$ ossia $\omega(\varphi^2(e)) = \varphi'^2(e')$, e in generale $\omega(\varphi^k(e)) = \varphi'^k(e')$, ossia $\omega(\varphi(\varphi^{k-1}(e))) = \varphi'(\varphi'^{k-1}(e')) = \varphi'(\omega(\varphi^{k-1}(e)))$, e poichè $\varphi^{k-1}(e)$ è un qualunque elemento x di S, si ha $\omega(\varphi(x)) = \varphi'(\omega(x))$. La $a)$ ci dice poi che ω è un isomorfismo tra i gruppi additivi S ed S'. Il lemma è così dimostrato.

II. - *Due gruppi* G *e* G$'$, *d'ordine* $p^t(p^t-1)$, *tali che* $G = SH$, $G' = S'H'$, *con* S, S$'$, *gruppi abeliani elementari d'ordine* p^t, H *ed* H$'$ *gruppi ciclici d'ordine* p^t-1, *e inoltre nessun elemento non identico di* H *(di* H$'$*) sia permutabile con alcun elemento non identico di* S *(di* S$'$*), sono tra loro isomorfi.*

Trasformando con un generatore h, (h') di H, (H') gli elementi di S (di S') si ottiene un automorfismo φ, (φ'), di S (di S') che permuta ciclicamente gli elementi non identici di questo. In base al lemma *I,* esiste un automorfismo ω tra S ed S', tale che $\omega(\varphi(x)) = \varphi'(\omega(x))$ per ogni x di S. Stabiliamo ora una corrispondenza biunivoca τ tra G e G' nel modo seguente. Se g è un elemento di G, e sh^i è la sua rappresentazione (unica) come prodotto di un elemento di S per uno di H, si ponga $\tau(sh^i) = \omega(s)h'^i$. Mostriamo ora che τ è un isomorfismo. Si avrà

$$\tau[(sh^i)(\bar{s}h^j)] = \tau[s(h^i\bar{s}h^{-i})h^{i+j}] = \omega(s)\omega(\varphi^{-i}(\bar{s}))h'^{i+j} = \omega(s)\varphi'^{-i}(\omega(\bar{s}))h'^{i+j} =$$
$$= \omega(s)h'^i\omega(\bar{s})h'^{-i}h'^{i+j} = \omega(s)h'^i\omega(\bar{s})h'^j = \tau(sh^i)\tau(\bar{s}h^j).$$

Il lemma *II*) è così dimostrato.

III. - *Se due piani* h-l-*transitivi di rango* n *hanno isomorfi i gruppi di omologie, d'ordine* $n(n-1)$, *di cui alla definizione, essi sono isomorfi.*

Abbiamo visto che, in base all'ultima osservazione del n. 2, ogni piano h-l-transitivo è isomorfo al piano che si costruisce, secondo il procedimento del n. 2, a partire dal gruppo delle omologie di asse l e centro su h del piano di partenza. Data l'univocità della costruzione di cui al n. 2, ne segue subito il presente lemma.

Siamo ora in grado di provare che:

Un piano h-l-*transitivo* Π *costruito a partire da un gruppo* G *d'ordine* $n(n-1)$ *a sottogruppi d'ordine* $n-1$ *ciclici, è desarguesiano.*

Infatti, un piano desarguesiano Λ di rango n ha il gruppo delle omologie aventi per asse una data retta e il centro situato in un dato punto fuori della retta ciclico d'ordine $n-1$, onde il gruppo delle omologie di un tale piano aventi per asse una data retta e il centro situato su di un'altra retta è d'ordine $n(n-1)$ a sottogruppi d'ordine $n-1$ ciclici. Per il lemma *II,* pertanto, tale gruppo è isomorfo a G. Per il lemma *III*) allora, Λ è isomorfo a Π, come si voleva.

4. Esisteranno piani h-l-transitivi non desarguesiani per quei valori del rango $n = p^t$ per cui esistono, nel gruppo d'automorfismi d'un gruppo elementare abeliano d'ordine n, sottogruppi d'ordine $n-1$ non ciclici, semplicemente transitivi sugli elementi diversi dall'identità, cioè per quei valori di n per cui esistono pseudocorpi del DICKSON d'ordine n, che non siano campi di GALOIS [2]. Essi sono stati determinati da H. ZASSENHAUS [5].

Un ben noto esempio si ha per $n = 9$. Infatti, nel gruppo degli automorfismi di un gruppo abeliano elementare S d'ordine 9, di generatori a e b, c'è un sottogruppo d'ordine 8, generato dai due automorfismi ξ e η, tali che

$$\xi(a) = b \qquad \eta(a) = ab$$
$$\xi(b) = a^2 \qquad \eta(b) = ab^2$$

Esso è un gruppo isomorfo a quello dei quaternioni, e, come si vede facilmente, è semplicemente transitivo sugli elementi non identici di S.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BAER, *Homogeneity of proiective planes*, « Amer. Journ. of. Math. », 64, (1942), 137-152.

[2] L. LOMBARDO-RADICE, *Sui piani grafici a coordinate di Veblen-Wedderburn*, in corso di stampa in « Ricerche di Matematica », 2, (1953).

[3] R. PERMUTTI, *Spazi affini generalizzati e relative proprietà reticolari*, « Ricerche di Matematica », 2, (1953), 192-203.

[4] G. ZAPPA, *Sui piani grafici finiti transitivi e quasi-transitivi*, in corso di stampa in « Ricerche di Matematica », 2, (1953).

[5] H. ZASSENHAUS, *Über endliche Fastkörper*, « Abhandlungen aus dem Mathem. Seminar der Hamburgischen Universität », 11, (1935), pp. 187-220.