Bollettino Unione Matematica Italiana

Ugo Cassina

Sulla critica di Grandjot all'aritmetica di Peano.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.4, p. 442–447.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_4_442_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Sulla critica di Grandjot all'aritmetica di Peano.

Nota di UGO CASSINA (a Milano)

Sunto. - *L'autore espone e confuta la critica di* GRANDJOT *all'aritmetica di* PEANO. *Dà una nuova dimostrazione dell'esistenza ed unicità della somma di due numeri, che ritiene più semplice di quella di* KALMÁR, *esposta da* LANDAU, *per ovviare alla critica di* GRANDJOT. *Termina con alcune considerazioni sul principio d'induzione.*

1. Le critica di Grandjot e sua confutazione. - Ai fondamenti dell'aritmetica secondo PEANO è stata fatta da K. GRANDJOT una critica, che ora mi propongo di esporre e di confutare. Tale critica è stata fatta conoscere per primo da E. LANDAU (a cui K. GRANDJOT l'aveva comunicata per lettera) e ripresa poi, esplicitamente od implicitamente, da altri: J. L. NEUMANN, L. KALMÁR, D. HILBERT e P. BERNAYS, ecc., fino a P. PI CALLEJA (1).

Per abbreviare il discorso, d'ora in poi, al vocabolo « numero » darò il significato di « numero intero assoluto ».

Ora, K. GRANDJOT, afferma che *bisogna* considerare le proposizioni di PEANO, che definiscono induttivamente la somma ed il prodotto di due numeri e la somma ed il prodotto di più numeri (cioè i simboli (2): $a + b$, $a \times b$, $\sum_{r=0}^{n} a_r$, $\prod_{r=0}^{n} a_r$, ove a, b, n sono numeri) come *postulati,* sulle *idee primitive* $+ \times \Sigma \Pi$.

(1) Cfr. E. LANDAU, *Grundlagen der Analysis*, Leipzig 1930, p. IX-X; D. HILBERT e P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, 1, Berlin 1934, p. 353; P. PI CALLEJA, *La objeción de Grandjot a la teoria de Peano del numero natural*, « Mathematicae Notae », Rosario, 9 (1949), p. 143-151 (stamp. 1950).

(2) Le notazioni di PEANO, relative ai segni Σ e Π, sono le seguenti:

$$\Sigma(a_r \mid r, 0 \cdots n), \Pi(a_r \mid r, 0 \cdots n),$$

in cui "$\mid r$" si legge "variando r" ed il simbolo $0 \cdots n$ indica la classe formata dei numeri 0, 1, 2,..., n. Le notazioni di PEANO sono dunque più complete e tipograficamente più semplici delle ordinarie.

Se K. GRANDJOT, e gli autori che adottano le sue vedute, vogliono farlo, niuno può contestarlo, perchè ciò fa parte della libertà del trattatista (3), ma che sia necessario, no!

Infatti, le critiche di detti autori sono fondate su un equivoco, o meglio sul travisamento del significato attribuito da G. PEANO alla definizione di « somma » di due numeri (a cui basta limitarci, potendosi ripetere per le altre definizioni criticate considerazioni analoghe).

Ed, in vero, scrive E. LANDAU (4) (seguendo K. GRANDJOT): « Sulla base dei suoi assiomi PEANO definisce $x+y$ per x *fisso* e per *ogni* y nel seguente modo:

$$x+1=x'$$
$$x+y'=(x+y)'.$$

e lui e i seguaci pensano con ciò che $x+y$ sia definito in generale ».

(In queste formule x' corrisponde al segno $x+$ di PEANO ed al segno suc x di PIERI, che io pure adotterò).

Ma il pensiero di G. PEANO, così esposto, è *travisato.*

Infatti, nelle « Arithmetices principia » (1889) (5), che è il suo primo lavoro sui fondamenti dell'aritmetica (ed in cui le idee primitive sono quelle di $\mathrm{N}=$ numero naturale, $1=$ unità, $a+1=$ $=$ successivo di a) egli scrive (p. 2):

Definitio

18. $$a,b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\; a+(b+1)=(a+b)+1.$$

Nota. – Hanc definitionem ita legere oportet: si a et b sunt numeri, et $(a+b)+1$ sensum habet (scilicet si $a+b$ est numerus), sed $a+(b+1)$ nondum definitus est, tunc $a+(b+1)$ significat numerum qui $a+b$ sequitur »

E, nella seconda edizione del *Formulario matematico* (1898) (6), in cui espone per la prima volta l'aritmetica fondata sui numeri a partire da 0 invece che da 1 (e quindi le idee primitive sono ora: $\mathrm{N}_0=$ nombre (entier, positif ou nul), $0=$ zéro, $a+=$ successif de a) scrive (p. 6):

« 011. $$a,b \,\varepsilon\, \mathrm{N}_0 \,.\supset.\; \begin{array}{ll} \cdot 1 & a+0=a \\ \cdot 2 & a+(b+)=(a+b)+ \end{array} \Big\} \,\mathrm{Df}$$

(3) Cfr. U. CASSINA, *Sulle definizioni per astrazione*, « Atti Congr. Studi Metodologici », Torino, 1953.

(4) E. LANDAU, l. c. (1), p. X.

(5) G. PEANO, *Arithmetices principia nova methodo exposita*, Bocca, Torino 1889.

(6) G. PEANO, *Formulaire de mathématiques*, t. II, § 2, Torino 1898. (F. 1898).

P 011. *Note.* Les P 011 ·1 et ·2 donnent, par induction, la définition de la somme $a+b$; « $a+0$ signifie a; et si l'on connaît la signification de $a+b$, pour une certaine valeur de b, par $a+(b+)$ on entend le successif de $a+b$ ».

Ne risulta che, nella ·2, deve intendersi *noto* il significato di $a+b$, e ciò nell'ipotesi esplicita che a sia un numero qualunque e b un certo numero; quindi la ·2 e la definizione « nominale » di $a+$ suc b nelle ipotesi che a e b siano numeri soddisfacenti alla sola condizione che $a+b$ sia un numero.

Ora, poichè G. PEANO enuncia *esplicitamente* come postulato il *principio d'induzione*, sia nelle *Arithmetices principia* del 1889, che nelle successive edizioni del *Formulario* (a partire dalla seconda fino alla quinta) (7), e sia sotto forma simbolica che sotto forma ordinaria — ed una di queste è la seguente: "Se una proprietà è vera per il numero 0 ed essendo vera per l'ente x è vera anche per il successivo di x, allora è vera per ogni numero" —, ne risulta che le proposizioni ·1 e ·2, *interpretate nel modo detto da G. Peano*, ci danno il significato di $a+b$ essendo a e b numeri *qualsiansi*.

2. **Osservazioni dal punto di vista formale.** – Tuttavia, per rendere perfetta anche dal punto di vista *formale* la proposizione ·2, io credo che sia meglio scrivere *esplicitamente* nell'ipotesi della ·2, e non rimandare al commento della formula simbolica, la condizione che $a+b$ si ritiene noto, e quindi che sia un numero. In tal modo la proposizione ·2 assume la forma:

$$2 \cdot \quad a,\, b,\, (a+b) \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot \ a + \operatorname{suc} b = \operatorname{suc}(a+b) \qquad \mathrm{Df}$$

leggi: "Qualunque siano i numeri a e b, se $a+b$ è un numero, allora $a+$ suc b indica per definizione il successivo di $a+b$".

Ed allora le ·1 e ·2′, anche dal punto di vista *formale,* sono definizioni "nominali" corrette: la prima di $a+0$ e la seconda di $a+$ suc b; la prima vale nell'ipotesi che a sia un numero qualunque e la seconda nelle ipotesi che a e b siano numeri soddisfacenti alla sola condizione che anche $a+b$ sia un numero.

(7) Ecco, per es., quanto scrive G. PEANO in l. c. (6). F. 1898, p 1·2:

$$\text{"}002 \cdot 5 \quad s \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}.\, 0 \,\varepsilon\, s \,\colon x \,\varepsilon\, s \cdot \supset_x \cdot (x+) \,\varepsilon\, s \,\colon \supset \cdot N_0 \supset s \quad \mathrm{Pp}$$

$$\{ P \cdot 5 = \text{Induct} = \text{" Loi d'induction "} \}.$$

"Soit s une classe; supposons que 0 appartienne à cette classe, et que toutes les fois qu'un individu x appartient à cette classe, son suivant y appartienne aussi; alors tous les nombres appartiennent à cette classe. On appelle "principe d'induction" cette Pp. On peut aussi la lire: "Si une proposition est vraie pour le nombre 0, et étant vraie pour le nombre x, alle est aussi vraie pour le nombre $x+$, elle est vraie en général".

L'essere la $\cdot 2$ non corretta dal punto di vista formale ha portato anche D. HILBERT e P. BERNAYS [8] ed affermare che la $\cdot 2$, nell'aritmetica di PEANO, deve *necessariamente* essere presa come un *nuovo* postulato sull'idea primitiva di *somma* (rappresentata dal segno $+$). Tale veduta è condivisa da P. PI CALLEJA [9] e pare anche da BEPPO LEVI. [10].

Ma, invece, basta dare alla $\cdot 2$ e relativo commento. la forma $\cdot 2'$ perchè essa diventi la definizione nominale corretta di $a + \mathrm{suc}\, b$ nelle ipotesi scritte, e quindi cada ogni obiezione, anche formale. Come controprova, si osservi che, nelle dimostrazioni relative alle proprietà della somma di due o più numeri, fondate sul principio d'induzione. si ha appunto bisogno *soltanto* delle $\cdot 1$ e $\cdot 2'$.

3. **Sulla dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità della somma.** – Del resto, E. LANDAU, [11] dopo aver esposto la critica di GRANDJOT, fa vedere come, per sviluppare l'aritmetica secondo le idee di PEANO. siano *sufficienti* i postulati di PEANO (ed allora non si capisce perchè egli dica "giusta" (*berechtigt*) l'osservazione di K. GRANDJOT).

Precisamente, E. LANDAU, accenna a varie vie per ottenere tale scopo: una sua ad altre suggeritegli da J. L. NEUMANN e da L. KALMÁR; e quella che egli adotta nel suo libro è appunto la via di KALMÁR. riprodotta poi anche da P. DUBREIL [12] e da P. PI CALLEJA [13].

Tale procedimento consiste essenzialmente nel dimostrare l'esistenza e l'unicità di $a + b$. *qualunque siano* i numeri a e b, dimostrandola dapprima per $a = 0$ e *ogni* b e poi, supponendola dimostrata per un *certo* a ed ogni b, dedurla per il *successivo* di a ed *ogni* b.

Voglio accennare ad un'altra via, che mi pare più semplice di quella esposta da detti autori, per raggiungere tale scopo.

Consideriamo $a + b$, ove a e b sono numeri, come l'ente ottenuto eseguendo l'operazione di "aggiungere b" su a; dal punto di vista simbolico poniamo cioè:

$$a + b = a(+ b),$$

(8) D. HILBERT e P. BERNAYS, l. c. (1).

(9) P. PI CALLEJA, l. c. (1), p. 145.

(10) BEPPO LEVI, *Recensione dell'opera di Hilbert-Bernays*, citata in (1), «Boll. Un. Mat. It.», 14 (1935), p. 32.

(11) E. LANDAU, l. c (1), p. X

(12) P DUBREIL, *Algèbre*, Paris 1946.

(13) P. PI CALLEJA, l. c. (1), p. 145-148.

ove $+b$ è il simbolo dell'operazione di "aggiungere b" sotto forma di *suffisso* (od operatore a destra).

Ed indichiamo con $(+b;\ N_0)$ l'operazione di aggiungere b limitata al campo N_0 dei numeri, la quale è perciò una particolare "funzione" (definita nel campo N_0).

Allora l'espressione $a+b$, ove a e b sono numeri, sarà definita per *ogni* a e per *ogni* b e rappresenterà un numero, se la funzione $(+b;\ N_0)$ è nota *qualunque* sia il numero b e trasforma numeri in numeri.

Quindi, in virtù del principio d'induzione (postulato 5 di PEANO), affinchè quanto si asserisce sia vero, *basta* che sia vero per $b=0$ (cioè che sia nota la funzione $(+0;\ N_0)$ e che essa trasformi numeri in numeri), ed ammesso che sia vero per un *certo* b sia vero anche per suc b (cioè ammessa nota la funzione $(+b;\ N_0)$ per un *certo* b e che trasformi numeri in numeri, allora è nota anche la funzione $(+\operatorname{suc} b;\ N_0)$ la quale trasforma pure numeri in numeri).

Ora è appunto quello che si ha immediatamente in virtù delle definizioni $\cdot 1$ e $\cdot 2'$.

Infatti, in virtù della $\cdot 1$, si ha che la funzione $(+0;\ N_0)$ coincide con l'identità nel campo N_0, e quindi è nota e trasforma numeri in numeri.

E se è nota la funzione $(+b;\ N_0)$ per un *certo* numero b, vuol dire che è noto il significato di $a+b$ *qualunque* sia il numero a e, se la funzione $(+b;\ N_0)$ trasforma numeri in numeri, vuol dire che $a+b$ è un numero e quindi è noto il significato di $\operatorname{suc}(a+b)$, il quale anzi, in virtù del postulato 2 di PEANO ("i successivi dei numeri sono numeri"), indica un numero.

Allora, la definizione $\cdot 2'$, ci dice che:

$$a+\operatorname{suc} b=\operatorname{suc}(a+b),$$

e ciò, dunque, *qualunque* sia il numero a.

Ciò prova, appunto, che è noto il significato della funzione $(+\operatorname{suc} b;\ N_0)$, e che tale funzione trasforma numeri in numeri, che è appunto quanto dovevasi dimostrare per dedurre la proprietà enunciata.

4. Sul principio d'induzione. – E terminerò osservando che molti autori credono ancora che il "principio d'induzione" sia un principio di *logica*, mentre invece non è altro che un principio dell'*aritmetica ordinaria*: precisamente il principio essenziale a caratterizzare la classe dei numeri, la quale appare infatti come la minima classe soddisfacente alle condizioni di contenere lo zero ed i successivi dei suoi elementi.

Ciò ha messo in chiara luce G. PEANO, oltre un cinquantennio fa appunto coi suoi principii di aritmetica. Quest'osservazione di G. PEANO è tenuta presente da A. N. WHITEHEAD e B. RUSSELL ([14]) nella loro definizione dei "numeri cardinali induttivi" (che corrispondono ai "numeri" di PEANO), ottenuti appunto mediante il principio d'induzione dalla classe dei "numeri cardinali", questi alla lor volta ottenuti attraverso la nozione di corrispondenza biunivoca.

Il chiaro significato del principio d'induzione, nell'aritmetica di PEANO, è rilevato in modo esplicito da BEPPO LEVI ([15]).

Ne risulta che le cosidette definizioni e dimostrazioni per "ricorrenza" non sono altro che definizioni e dimostrazioni fondate sul principio d'induzione, e quindi applicabili solo alle classi di numeri (o isomorfe ad esse).

E quindi, sviluppando un corso di teoria dei numeri, ritengo che non si possa (contrariamente a quanto scrive E. LANDAU) "pensare che gli studenti non abbiano mai sentito parlare del principio d'induzione", perchè esso è insito nello stesso concetto di numero: cioè noi possiamo avere l'*intera* classe dei numeri *solo* mediante il principio d'induzione ([16])

Prima che esso assumesse la forma attuale, la dimostrazione di una proprietà valida per *tutti* i numeri veniva esposta in questo modo: la si verificava per 0, la si verificava per 1 (sfruttando il fatto che essa era già vera per 0), la si verificava per 2 (sfruttando il fatto che essa era già vera per 0 e per 1), la si verificava per 3 (sfruttando il fatto che essa era già vera per 0, per 1 e per 2), e così si continuava fino a che si scriveva una frase del genere: "così si può continuare fin che si vuole", o si scrivevano dei puntini ".." e si diceva "eccetera".

L'eliminazione di questi puntini "..." e di frasi del tipo esposto, è l'effetto del principio d'induzione nella forma attuale e può essere ottenuta solo mediante esso.

([14]) A. N. WHITEHEAD e B. RUSSELL, *Principia mathematica*. 1, Cambridge 1910, p. 571; 2, Cambridge 1912, p. 207.

([15]) BEPPO LEVI, l. c. ([10]), p. 35.

([16]) Sui legami del principio d'induzione con altri principii aritmetici. come quello del minimo e di discesa, cfr.: M. PIERI, *Sopra gli assiomi aritmetici*, «Boll. Acc. Gioenia Catania», 1908, p. 26-30; G. VACCA, *Sul principio di discesa di Fermat*, ecc., «Atti Acc. Torino», 63 (1928), p. 241-252. Vedi anche: C. BURALI-FORTI, *Le classi finite*, «Atti Acc. Torino», 32 (1896), p. 34-52; *Logica matematica*, ed. 2ª, Milano, 1919, p. 332.