Bollettino
Unione Matematica Italiana

Davide Carlo Demaria

I sistemi di superficie con la proprietà proiettiva o conforme in prima approssimazione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.4, p. 409–413.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_4_409_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1953.

I sistemi di superficie con la proprietà proiettiva o conforme in prima approssimazione.

Nota di DAVIDE CARLO DEMARIA (a Torino)

Sunto. - *Come nell'introduzione.*

Nella presente Nota determiniamo nei n. 1–3, nel campo analitico, i sistemi ∞^4 di superficie che godono della proprietà proiettiva in prima approssimazione, vale a dire i sistemi tali che per le ∞^2 superficie passanti per due punti infinitamente vicini A e B le stelle descritte dai loro piani tangenti in questi punti risultino riferite proiettivamente in prima approssimazione.

L'uso di questo termine è analogo a quello fatto dal prof. A. TERRACINI e da altri nello studio di sistemi di curve [1].

Nei n. 4–5 risolviamo invece il problema analogo per la proprietà conforme [2].

1. Il sistema di due equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine nella funzione incognita $z = z\,(x, y)$

$$r = r\,(x, y, z;\, p, q, s) \qquad (1\text{–}1)$$
$$t = t\,(x, y, z;\, p, q, s)$$

con le due condizioni:

1) $\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial t}{\partial s} \neq 1$,

2) il sistema sia completamente integrabile [3],

definisce nello spazio ordinario un sistema ∞^4 di superficie.

Per due punti $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(X, Y, Z)$ infinitamente vicini passano generalmente ∞^2 superficie integrali, che considereremo individuate, assegnando il piano tangente nel punto A, o, ciò che è lo stesso, fissando $p = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A$, $q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A$.

Per la stessa superficie consideriamo pure i valori delle derivate $P = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_B$, $Q = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_B$ calcolate nel punto B; e assumiamo le coppie di numeri p, q; P, Q come coordinate proiettive nelle due stelle di piani tangenti rispettivamente di centro A e B.

2. Sia $Z = Z(x, y)$ una generica superficie soddisfacente alle condizioni precedenti:

$$Z = z_0 + ph + pk + \frac{1}{2}\,(rh^2 + 2shk + tk^2) + [3] \qquad (2\text{–}1)$$

ove $r = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\right)_A$ $s = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}\right)_A$; $t = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\right)_A$; $h = X - x_0$; $k = Y - y_0$

Siccome consideriamo le superficie del sistema (1–1) vincolate a

[1] Cfr. A. TERRACINI, *Sobre les ecuaciones diferenciales de tipo* (G) *y de tipo* (F), « Rev. de Mat. y Fís. teór. de la Universidad de Tucumàn », vol. 6, 1948.

[2] Cfr. A. TERRACINI, *Su una proprietà differenziale conforme di certi sistemi triplamente infiniti di curve*, « Rend. Sem. Mat. Torino », vol. 8, 1947/9.

[3] Vedi GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Paris 1898, t. II, n. 121.

passare per A, B con valori prefissati di p, q. la s non è una variabile indipendente, ma (fissati A, B) una funzione implicita di p, q cioè:

$$Z = Z(p,\ q;\ s(p,\ q)). \tag{2-2}$$

Derivando totalmente rispetto a p e q e calcolando tutte le derivate nel punto B, si ha (indicando più brevemente $\frac{\partial Z}{\partial s}$ con Z_s, ecc.):

$$s_p = -Z_p/Z_s, \qquad s_q = -Z_q/Z_s. \tag{2-3}$$

Per calcolare le derivate totali delle funzioni P, Q rispetto alle variabili p, q nel punto B, basta ora operare, mutatis mutandis, come in un mio precedente lavoro ([4]) e in tal modo facilmente s'ottiene:

$$\begin{aligned}
Z_s P_p &= \frac{1}{2}(-h^2 r_s + k^2 t_s) + [3]\\
Z_s P_q &= -hkr_s - k^2 + [3]\\
Z_s^3 P_{pp} &= \frac{1}{2}[h^4 k r_{ss} + h^3 k^2 (t_s r_{ss} - r_s t_{ss}) - h^2 k^3 t_{ss}] + [6]\\
Z_s^3 P_{pq} &= \frac{1}{2}[h^3 k^2 r_{ss} + h^2 k^3 (t_s r_{ss} - r_s t_{ss}) - hk^4 t_{ss}] + [6]\\
Z_s^3 P_{qq} &= \frac{1}{2}[h^2 k^3 r_{ss} + hk^4 (t_s r_{ss} - r_s t_{ss}) - k^5 t_{ss}] + [6].
\end{aligned} \tag{2-4}$$

Le derivate della funzione Q si possono ottenere, dalle (2-4) mediante lo scambio entro ciascuna delle coppie h, k; p, q; r, t; P, Q; lasciando però inalterate le lettere Z, s.

3. Volendo determinare i sistemi (1-1) che godono della proprietà proiettiva, basta sostituire le derivate di P, Q a norma delle (2-4) nel seguente sistema di equazioni alle derivate parziali ([5]),

([4]) *Sui sistemi di curve iperspaziali che godono della proprietà proiettiva in prima approssimazione*, in corso di stampa in Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, (3), vol. I; cfr. n. 3.

([5]) Le (3—1) esprimono che la corrispondenza posta tra due stelle di piani (ognuno dei quali sia individuato entro la rispettiva stella rispettivamente da coordinate non omogenee p, q; P, Q) dalle formule di trasformazione $P = P(p,\ q)$, $Q = Q(p,\ q)$ è un'omografia. Cfr. (per stelle di rette) il n. 2 di l. c. ([4]). Le (3—1) traducono perciò la proprietà proiettiva in senso finito.

dopo aver moltiplicato ciascuna equazione per il fattore non nullo Z_s^5:

$$2P_pP_qP_{pq} - P_p^2P_{qq} - P_q^2P_{pp} = 0$$

$$2Q_pQ_qQ_{pq} - Q_p^2Q_{qq} - Q_q^2Q_{pp} = 0$$

$$\begin{aligned} 2P_pQ_qQ_{pq} + 2Q_pP_qQ_{pq} - 2P_pQ_pQ_{qq} - 2P_qQ_qQ_{pp} - \\ - Q_p^2P_{qq} - Q_q^2P_{pp} + 2Q_pQ_qP_{pq} = 0 \end{aligned} \tag{3-1}$$

$$\begin{aligned} 2P_pQ_qP_{pq} + 2Q_pP_qP_{pq} - 2P_pQ_pP_{qq} - 2P_qQ_qP_{pp} - \\ - P_p^2Q_{qq} - P_q^2Q_{pp} + 2P_pP_qQ_{pq} = 0 \end{aligned}$$

A sostituzione fatta si vedrebbe che nei primi membri i termini di grado minimo rispetto ad h, k sono di grado 9; pertanto, affinchè valga la proprietà proiettiva in prima approssimazione, devono essere nulli i coefficienti di tutti i termini di tale grado.

Ad esempio il coefficiente di k^9 della prima equazione delle (3-1) è (1/8) $t_s^2t_{ss}$; e di conseguenza per la simmetria già accennata il coefficiente di h^9 della seconda equazione è (1/8) $r_s^2r_{ss}$. Annullando tali coefficienti, si hanno le:

$$r_{ss} = 0, \qquad t_{ss} = 0. \tag{3-2}$$

Osserviamo che se valgono le (3-2) sono nulli tutti i coefficienti dei termini di grado 5 in h, k nelle espressioni di: $Z_s^3P_{pp}$, $Z_s^3P_{pq}$, $Z_s^3P_{qq}$, $Z_s^3Q_{pp}$, $Z_s^3Q_{pq}$, $Z_s^3Q_{qq}$; dal che deriva che sono pure tutti nulli i coefficienti dei termini di grado 9 in h, k che compaiono nei primi membri delle (3-1).

Possiamo pertanto concludere:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè i sistemi (1-1) *godano della proprietà proiettiva in prima approssimazione è che essi siano del tipo:*

$$\begin{cases} r = As + B \\ t = Cs + D \end{cases} \tag{3-3}$$

ove con A, B, C, D, *si indicano delle generiche funzioni di* x, y, z; p, q, *purchè soddisfacciano alla* $AC \neq 1$ *ed alla condizione di completa integrabilità.*

4. Passando ai sistemi (1-1) che godono della proprietà conforme in prima approssimazione, basterà sostituire le (2-4) nel seguente sistema d'equazioni differenziali ([6]):

$$
\begin{aligned}
&(1+P^2+Q^2)^2(P^2+Q^2)-(1+p^2+q^2)\{[p(PP_p+QQ_p)+\\
&\qquad +q(PP_q+QQ_q)]^2+(PP_p+QQ_p)^2+(PP_q+QQ_q)^2\}=0\\
(4\text{-}1)\qquad &P(1+P^2+Q^2)^2-(1+p^2+q^2)\{[(PP_p+QQ_p)P_p+(PP_q+QQ_q)P_q]+\\
&\qquad +(pP_p+qP_q)[p(PP_p+QQ_p)+q(PP_q+QQ_q)]\}=0\\
&(1+p^2+q^2)[(pP_p+qP_q)^2+P_p^2+P_q^2]-(1+P^2)(1+P^2+Q^2)=0
\end{aligned}
$$

Moltiplicando le tre equazioni per Z_s^2 e facendo le sostituzioni, i primi membri diventano serie di potenze in h, k i cui termini minimi sono di grado 4 in h, k.

Affinchè valga la proprietà conforme in prima approssimazione devono essere nulli tutti i coefficienti dei termini di grado 4 in h, k nelle tre precedenti equazioni.

Annullando i coefficienti di k^4 e di hk^3 nella terza equazione si ottiene:

$$(4\text{-}2)\qquad r_s=(1+p^2)/pq, \qquad t_s=(1+q^2)/pq$$

Ora (evitando con tale considerazione calcoli piuttosto laboriosi) osserviamo che:

1°) per le (2-4) i termini delle (4-1) aventi grado 4 in h, k dipendono soltanto (oltre che da p, q) da r_s, t_s.

2°) le ∞^4 sfere godono della proprietà conforme in senso finito e che esse soddisfanno al seguente sistema d'equazioni differenziali:

$$(4\text{-}3)\qquad r=(1+p^2)s/pq, \quad t=(1+q^2)s/pq.$$

Da ciò possiamo senz'altro concludere che le (4-2) sono anche sufficienti, perchè sussista la proprietà conforme in prima approssimazione.

Perciò: *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè un sistema* (1-1) *goda della proprietà conforme in prima approssimazione, è che esso sia del tipo:*

$$
(4\text{-}4)\qquad
\begin{aligned}
r&=(1+p^2)s/pq+B\\
t&=(1+q^2)s/pq+D
\end{aligned}
$$

ove con B, D *si indicano due funzioni qualunque di* x, y, z; p, q; *purchè soddisfacciano alla condizione di completa integrabilità;*

([6]) Queste equazioni sono le condizioni differenziali per l'esistenza di un movimento che porti la stella dei piani tangenti in A in quella di centro B. Cfr. la mia nota: *I sistemi ∞^6 di curve spaziali godenti della proprietà conforme in prima approssimazione*, n. 3, in preparazione, (ove si considerano stelle di rette, invece di stelle di piani).