BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI GATTESCHI

Una proprietà degli estremi relativi dei polinomi di Jacobi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.4, p. 398–400.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_4_398_0>

Una proprietà degli estremi relativi dei polinomi di Jacobi.

Nota di LUIGI GATTESCHI (a Bari)

Sunto. - *Si prova che, detta* $\varphi_{r,n}$ *l'ascissa dell'r-esimo estremo relativo dei polinomi di* JACOBI $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)$, *risulta, per un fissato* r, $\lim_{n\to\infty} (\operatorname{sen}\varphi_{r,n}/2)^{\alpha}(\cos\varphi_{r,n}/2)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\varphi_{r,n}) = J_\alpha(j_{r,\alpha+1})$ *dove* $j_{r,\alpha+1}$ *è l'r-esimo zero della funzione di* BESSEL *di prima specie* $J_{\alpha+1}(x)$.

1. G. VILLARI [1] e F. G. TRICOMI [2] hanno studiato i limiti per $n \to \infty$ degli estremi relativi dell'n-esimo polinomio di LEGENDRE $P_n(x)$.

Più precisamente G. VILLARI ha provato direttamente che, dette $y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{n-1,n}$ le ascisse degli estremi relativi di $P_n(x)$ disposte in ordine decrescente, e posto

$$| P_n(y_{r,n}) | = \mu_{r,n},$$

si ha, fissato r,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{r,n} = h_r > 0.$$

In particolare è $h_1 > 0,39983$, $h_2 > 0,29408$.

F. G. TRICOMI, sfruttando parzialmente risultati contenuti in un suo precedente lavoro, ha inoltre dimostrato che è, *fissato* r,

$$\lim P_n(y_{r,n}) = J_0(j_{r,1}),$$

dove $j_{r,1}$ indica l'r-esimo zero positivo della funzione di BESSEL di prima specie $J_1(x)$.

(12) Le condizioni analitiche a cui si è condotti dall'enunciato precedente o dal VI, mostrano che la corrispondenza Σ ed anche le ∞^s di S_{n-s} possono talvolta non essere arbitrarie (in uno oppure anche in entrambi gli spazi S_n, $\overline{S}_n$) ma sottoposte a condizioni che gli enunciati predetti permettono in ogni caso di scrivere. Nel n. 5 le abbiamo interpretate geometricamente per $s = 2$, $n = 3$.

(1) G. VILLARI, *Sugli estremi relativi dei polinomi di Legendre*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), 7, (1952), pp. 421-423.

(2) F. G. TRICOMI, *Determinazione dei limiti per* n $\to \infty$ *degli estremi relativi dell'n-esimo polinomio di Legendre*, ibidem, (3), 8, (1953), pp. 107-109.

Ultimamente M. T. VACCA [3] ha trattato un' analoga questione per polinomi di JACOBI $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ed ha provato che, *fissato* r, risulta

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha}P_n^{(\alpha,\beta)}(y_{r,n}) = \left(\frac{j_{r,\alpha+1}}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(j_{r,\alpha+1}), \tag{1}$$

dove $y_{r,n}$ è l'ascissa dell'r-esimo estremo relativo di $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ e $j_{r,\alpha+1}$ l'r-esimo zero di $J_{\alpha+1}(x)$.

In questa Nota, partendo da formule note, proveremo rapidamente che, indicando con $\mu_{r,n}^{(\alpha,\beta)}$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$, i valori della funzione

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\right)^\alpha \left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta), \qquad \alpha > -1,$$

negli estremi di $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $(x = \cos\vartheta)$, si ha, *fissato*, r,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{r,n}^{(\alpha,\beta)} = J_\alpha(j_{r,\alpha+1}). \tag{2}$$

2. È noto il seguente teorema [4]:

TEOREMA. - *Siano* $x_{1,n} > x_{2,n} > \ldots$ *gli zeri di* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *in* $(-1, 1)$ *disposti in ordine decrescente* (α *e* β *reali ma non necessariamente maggiori di* -1).

Posto $x_{r,n} = \cos\vartheta_{r,n}$, $0 < \vartheta_{r,n} < \pi$, *allora per un fissato* r. *si ha*

$$\lim_{n\to\infty} n\vartheta_{r,n} = j_{r,\alpha} \tag{3}$$

dove $j_{r,\alpha}$ *è l'r-esimo zero positivo di* $J_\alpha(x)$.

Se $\alpha > -1$ e β reale arbitrario sussiste inoltre la seguente formula asintotica di HILB-SZEGÖ [5]

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\right)^\alpha \left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta) = \tag{4}$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n![n+(\alpha+\beta+1)/2]^\alpha}\left(\frac{\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} J_\alpha\{(n+(\alpha+\beta+1)/2)\vartheta\} + \vartheta^{\frac{1}{2}}O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

Supposto dunque $\alpha > -1$ e β reale arbitrario si valutino le ascisse $y_{1,n} > y_{2,n} > \ldots$ degli estremi relativi di $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ in $(-1, 1)$.

[3] M. T. VACCA, *Determinazione asintotica per* n $\to\infty$ *degli estremi relativi dell'n-esimo polinomio di Jacobi*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), *8*, (1953), pp. 277-280

[4] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », XXIII, New York, (1939), p. 186.

[5] loc. cit. [4], p. 191.

queste per la nota relazione

$$\frac{d}{dx}\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$

sono gli zeri di $P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$, e posto

$$y_{r,n} = \cos\varphi_{r,n}, \qquad 0 < \varphi_{r,n} < \pi,$$

abbiamo per la (3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\varphi_{r,n} = j_{r,\alpha+1}. \tag{5}$$

D'altra parte per la (4) è

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\varphi_{r,n}}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\varphi_{r,n}}{2}\right)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\varphi_{r,n}) =$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n![n+(\alpha+\beta+1)/2]^\alpha}\left(\frac{\varphi_{r,n}}{\operatorname{sen}\varphi_{r,n}}\right)^{\frac{1}{2}} J_\alpha\{(n+(\alpha+\beta+1)/2)\varphi_{r,n}\} +$$

$$+ \varphi_{r,n}^{\frac{1}{2}} O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

e tenuto conto della (5) e che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n![n+(\alpha+\beta+1)/2]^\alpha}\left(\frac{\varphi_{r,n}}{\operatorname{sen}\varphi_{r,n}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

ne segue

$$\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{\varphi_{r,n}}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\varphi_{r,n}}{2}\right)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\varphi_{r,n}) = J_\alpha(j_{r,\alpha+1}), \tag{6}$$

e questo prova la (2).

Se osserviamo ora che è

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi_{r,n}}{2} = 1,$$

e per la (5)

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(\operatorname{sen}\frac{\varphi_{r,n}}{2}\right)^\alpha = \frac{1}{2^\alpha}\lim_{n\to\infty} n^\alpha\varphi_{r,n}^\alpha = \frac{1}{2^\alpha}(j_{r,\alpha+1})^\alpha,$$

si ha dalla (6)

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\varphi_{r,n}) = \left(\frac{j_{r,\alpha+1}}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(j_{r,\alpha+1}),$$

che è il risultato stabilito da M. T. VACCA.