BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CARLO BONFERRONI

Una proprietà generale delle funzioni.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.4, p. 384–390.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_4_384_0>

Una proprietà generale delle funzioni.

Nota di CARLO BONFERRONI (a Firenze)

Sunto. - *Si dimostra che qualunque funzione coincide in ogni punto, salvo un insieme numerabile, con un suo " limite „ nel senso di* CAUCHY-PEANO.

Scopo della presente Nota è di mostrare come qualunque funzione reale univoca di variabile reale goda di una proprietà che costituisce, in un certo senso, una estensione dell'ordinaria continuità. Da questa si passa alla semicontinuità del BAIRE trascurando una parte della condizione di continuità; sopprimendo, invece, la condizione di unicità del limite e riferendosi alla "classe limite„ nel senso di CAUCHY-PEANO, si perviene alla proprietà in questione.

1. In generale, sia $Q = f(P)$ la funzione considerata, essendo P e Q punti reali di spazi euclidei rispettivamente a p, q coordinate, ed assegnando a P come campo di variabilità un rettangolo (a p dimensioni). Quando P tende ad A, essa ammette sempre dei "limiti„ nel senso di CAUCHY-PEANO (1), i quali formano la "classe limite„. Se v'è un solo limite, questo è il limite ordinariamente considerato, o "limite unico„ (2).

La classe limite è, ovviamente, chiusa. Se Q dipende da una sola coordinata, si possono considerare il massimo ed il minimo della classe limite (eventualmente infiniti), i quali sono il limite massimo $\lambda' f(A)$ e il limite minimo $\lambda_1 f(A)$ di $f(P)$ in A, spesso utilizzati nell'Analisi matematica.

Poichè, dicendo "limite„, comunemente s'intende "limite unico„, allo scopo di evitare confusioni userò il termine *interlimite* per indicare un limite non necessariamente unico, cioè un elemento della classe limite.

(1) PEANO: *Formulario Mathematico*, 1908, fasc. 1, p 215, Nota. Un'ampia esposizione trovasi in U. CASSINA, *Teoria dei limiti*, R. Ist. Lombardo di Sc. e Lett., Rendic., Vol. LXX, 1937.

(2) Il punto L è un "limite„ di Q se, fissato arbitrariamente il positivo ρ, in ogni intorno di A si trova almeno un punto P per cui la distanza PQ è $< \rho$. E se, fissato un punto Q_0, in ogni intorno di A si trova almeno un punto P per cui è $Q_0 Q > \rho$, si dirà che "l'infinito„ è un limite di Q. Viene così estesa - in modo ovvio - la definizione data dal PEANO per il caso $y = f(x)$, con x, y numeri reali ($p = q = 1$). Costruita una qualunque successione P_n tendente ad A, l'insieme dei punti Q_n corrispondenti possiede almeno un punto limite (d'accumulazione o d'iterazione infinita), che è anche "limite„ nel senso ora detto.

La considerazione della classe limite, dopo CAUCHY, "andò giù di moda„ (così scrive PEANO, *Sulla definizione di limite*, R. Acc. d. Sc. di Torino, vol 48, 1912-13, p. 8 dell'estr.); ma ora ricomincia a diffondersi - sia pure sotto diverse forme e denominazioni - non bastando, in certe questioni generali, la nozione di limite massimo e limite minimo: p. es., il "contingente„ del BOULIGAND (*Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, Paris, 1932, p. 65) è la classe limite - espressa geometricamente - del rapporto incrementale fra un punto fisso ed uno variabile; e il "paratingente„ (id., p. 72) è la classe limite del rapporto incrementale fra due punti variabili.

2. *L'intercontinuità.* Si ha continuità in A quando $f(A)$ è anche limite unico in A. Se $f(P)$ ammette limite massimo e limite minimo, risulta

$$f(A) = \lambda' f(A) = \lambda_1 f(A).$$

Limitandosi alla prima eguaglianza, ed attenuandola in

$$f(A) \geq \lambda' f(A)$$

si definisce la semicontinuità superiore in A; similmente, la

$$f(A) \leq \lambda_1 f(A)$$

corrisponde alla semicontinuità inferiore.

Lasciamo cadere, nella definizione di continuità, la restrizione che $f(A)$ sia limite unico, e imponiamo solo che $f(A)$ *sia interlimite*: si potrà dire, in tal caso, che $f(P)$ è *intercontinua* in A. L'intercontinuità, ora definita, mantiene in sostanza una proprietà essenziale della continuità: poichè in prossimità di A i punti $f(P)$ cadono *solo* in prossimità degli interlimiti o in essi (3), quando $f(A)$ è uno di questi il passaggio al punto A medesimo non provoca una brusca variazione di comportamento. Si potrà dire, poi, che $f(P)$ è *continua superiormente* in A se $f(A) = \lambda' f(A)$; e, analogamente, *continua inferiormente* quando sia $f(A) = \lambda_1 f(A)$.

Indichiamo con $scf(A)$ lo *scarto* della funzione in A, cioè la minima distanza (positiva o nulla) tra $f(A)$ e un interlimite in A (minimo esistente perchè la classe limite è chiusa): la $f(P)$ sarà intercontinua dove è nullo il suo scarto.

3. La nozione di intercontinuità ora introdotta mi sembra meritevole di essere segnalata, perchè (come dimostrerò) quando si considerino interlimiti senza riduzione del campo di variabilità, *qualunque funzione è intercontinua, salvo al più un insieme numerabile di punti* (avvertenza che indicherò con la sigla « *s. i. n.* »).

Cominciamo a prendere in esame l'insieme I dei punti A per cui $f(A)$ è *finito* e non è interlimite in A (variando P in *tutto* il suo campo di variabilità). Fissato un positivo l diciamo I_1 la parte di I per cui $scf(A) > l$, e dividiamo lo spazio in cui varia Q in elementi numerabili E_1, E_2, ... con diametro massimo l, o inferiore (p. es.: se Q varia su una retta, dividiamo questa in segmenti consecutivi di lunghezza l; se Q varia in un piano, separiamo questo

(3) Preso ρ, in un certo intorno di A il punto $f(P)$ dista sempre meno di ρ da qualche interlimite. Si può dire, perciò, che la classe limite è il "limite" di $f(P)$.

mediante due sistemi perpendicolari di rette parallele in quadrati contigui di diagonale l; se Q varia nello spazio, dividiamo questo con tre sistemi di piani paralleli, perpendicolari a due a due, in cubi contigui di diagonale l; ecc. ...). Sia I_{11} la parte di I_1 per cui $f(A)$ cade in E_1 e sia A_1 punto di I_{11}: poichè $sc\,f(A) > l$, gli interlimiti in A_1 cadono fuori di E_1, onde è possibile determinare un intorno *completo* j_1 di A_1 in cui $f(P)$ è sempre fuori di E_1 [4]. In j_1 pertanto non possono cadere punti di I_{11}, onde A_1 è *punto isolato* di I_{11}. Ne segue che I_{11} è numerabile, perchè formato di punti isolati.

Similmente, sarà numerabile la parte I_{12} di I_1 che cade in E_2; ecc. Essendo $I_1 = I_{11} + I_{12} + \ldots$, sarà numerabile anche I_1.

Soppresso I_1, sia I_2 l'insieme dei punti A per cui $scf(A) > l/2$ (e $\leq l$): anche I_2 sara numerabile. Soppresso anche I_2 risulterà numerabile l'insieme I_3 dei punti A per i quali è $scf(A) > l/3$ (ma $\leq l/2$); ecc. Poichè $I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots$, anche I sarà numerabile.

Passiamo ora ai punti A, se ve ne sono, per cui $f(A)$ è infinito, mentre gli interlimiti in A sono finiti. In un certo intorno completo j di A il punto $f(P)$ resta prossimo a qualche interlimite (V. nota 3), sicchè non esistono in j punti in cui la funzione è infinita. Tali punti risultano, pertanto, isolati, e quindi numerabili.

In conclusione, resta dimostrato che $f(P)$ è intercontinua, salvo punti numerabili ed isolati.

Si ha, così, una proprietà generale delle funzioni che ne precisa alquanto il comportamento e di cui si potrà, talvolta, tener conto utilmente. Comunque sia definita, una funzione produce i propri interlimiti in modo da esserne riassorbita s. i. n.

Mentre si potrebbe essere indotti a ritenere che, in generale, $f(P)$ differisca dai suoi interlimiti in P, in realtà avviene l'opposto.

5. *Limitazione del campo di variabilità.* In quanto precede si sono considerati tutti i possibili interlimiti in A, senza restringere il campo di variabilità quando P tende ad A: ponendo, invece, delle limitazioni — cioè fissando per ogni punto A una parte $\gamma(A)$ del campo e imponendo a P di rimanere in essa — la proprietà indicata potrà non valere, perchè vengono soppressi degli interlimiti. In certi casi, tuttavia, essa permane.

Riprendiamo la precedente dimostrazione e consideriamo solo gli interlimiti che si formano nei sottocampi $\gamma(A)$: se P tende ad

(4) V. Nota (3)

A_1 (punto di I_{11}) in $\gamma(A_1)$, esisterà un intorno j_1 di A_1, contenuto in $\gamma(A_1)$, in cui non cadono punti di I_{11}. Non possiamo concludere, però, che A_1 sia punto isolato di I_{11}, perchè ora j_1 non è un intorno *completo* di A_1 [5]. Ma se, considerando altri punti di I_{11}, gli intorni j ad essi corrispondenti ammettono punti interni e risultano esterni l'uno all'altro, potremo associare ad ogni j un suo punto interno; tali punti saranno isolati, quindi numerabili; con essi saranno numerabili gli intorni j e perciò i punti di I_{11} (non risulta, però. che tali punti siano sempre isolati).

Continuando, allora, la dimostrazione precedente, si giungerà a stabilire che $f(P)$ è intercontinua (s. i. n.) nonostante il modo particolare di tendere al limite.

6. Un caso di questo tipo, notevole perchè si presenta nelle comuni funzioni di una sola variabile, è il seguente. Si faccia tendere P ad A in modo che sia $x > x(A)$, dove x è la prima coordinata di P e $x(A)$ la prima coordinata di A: diremo che P *tende ad* A *sulla destra rispetto ad* x. Si ottiene, così, la *classe-limite a destra* (contenuta nella classe-limite completa), rispetto alla quale dovremo considerare $scf(A)$.

Se A_1 è punto di I_{11}, sappiamo che esiste un intorno j_1 a destra di A_1 senza punti di I_{11}. Supponiamo che j_1 sia una zona (estesa fin dove il campo di variabilità lo consente) determinata dalla limitazione

$$x(A_1) < x < x(A_1) + h_1 \qquad (h_1 > 0).$$

Un altro punto A_2 di I_{11} sarà esterno a j_1, e anche ad esso supporremo corrisponda una zona j_2 del tipo suddetto, a destra di A_2. È chiaro che, se A_2 è a destra di j_1, la zona j_2 risulta esterna ad j_1: è se A_2 è a sinistra di j_1, poichè j_2 non può comprendere A_1, sarà ancora j_2 esterna ad j_1. Dette zone sono, dunque, disgiunte. Associando a ciascuna di esse un suo punto interno (p. es. il punto medio del segmento staccato sull'asse x), tali punti risultano isolati e, quindi, numerabili. Pertanto, sono numerabili anche le zone j e, con esse, i punti di I_{11}. Possiamo, allora, riprendere la dimostrazione data al n. 4, e giungere anche ora alla conclusione che *$f(P)$ è intercontinua a destra rispetto ad* x *(s. i. n.)*.

Similmente si può ragionare sugli interlimiti a sinistra, oppure rispetto ad un'altra coordinata, semprechè valgano ipotesi analoghe.

[5] Risulta, però. che A_1 è un punto-frontiera. Pertanto I_{11} è formato di punti-frontiera: e lo stesso dicasi di I_{12}, I_{13}, ecc. Quindi I_1 si scinde in una successione di insiemi frontiera, disgiunti. Lo stesso avverrà per I_2, I_3, ... e, infine, per l'insieme I.

7. Nel caso semplice $y = f(x)$, con x, y numeri reali, le condizioni suddette sono evidentemente soddisfatte, sia a destra che a sinistra di x; quindi $f(x)$ *è intercontinua sulla destra, e intercontinua sulla sinistra, s. i. n.*

Fuori di due insiemi numerabili, la $f(x)$ è, dunque, intercontinua sia a destra che a sinistra; e poichè due insiemi numerabili si riuniscono in un insieme ancora numerabile, si ritrova — per funzione di una sola variabile — la proprietà generale di n. 4. Per tale funzione, però, vale una proprietà ulteriore: l'intercontinuità (s. i. n.) anche quando ci si limiti ad una sola banda. E tale banda potrà variare con x, secondo una legge assegnata: p. es., se per x razionale si considerano gli interlimiti a destra, e per x irrazionale quelli a sinistra la $f(x)$ coinciderà ancora con un interlimite s. i. n.

8. *Alcuni casi particolari.*

a) se $f(P)$ è un numero reale, la $f(P)$ è semicontinua superiormente (n. 2) se $f(P) \geq \lambda' f(P)$: possiamo ora aggiungere che s. i. n. varrà il segno d'eguaglianza, cosicchè *una funzione semicontinua superiormente è continua superiormente* (*s. i. n.*). Analogamente per una funzione semicontinua inferiormente.

b) se la funzione $Q = f(P)$ ha limite (unico) in ogni punto, essa è continua s. i. n.

c) se $f(x)$ è funzione di una sola variabile ed ha limite unico a destra e limite unico a sinistra (anche diversi), essa è continua s. i. n. Questo caso particolare è ben noto.

d) sia P variabile in un piano (coordinate x, y) ed $f(P) = 0$ per x, y razionali, $f(P) = {}^1/_2$ quando solo x o solo y è irrazionale, $f(P) = 1$ per x, y irrazionali. La funzione ha per interlimiti 0, ${}^1/_2$, 1 in ogni punto; quindi è intercontinua in ogni punto: precisamente, è continua superiormente (inferiormente) in un punto di coordinate irrazionali (razionali).

9. Diamo, da ultimo, un esempio di funzione che, quando si limiti il campo di variabilità (n. 5), dà luogo a discontinuità non numerabili.

Sia $z = f(x, y)$ numero reale, funzione di P nel piano, cioè delle sue due coordinate cartesiane x, y. Poniamo $z = 1$ sulla retta $x + y = 1$, che diremo *direttrice*, e $z = 0$ nei rimanenti punti. In un punto A della direttrice gli interlimiti sono 0, 1 se P può tendere ad A senza restrizioni; negli altri punti l'unico limite è 0. La $f(x, y)$ risulta continua fuori dalla direttrice e continua superiormente sulla direttrice.

Imponiamo a P di tendere ad A rimanendo nell'angolo retto formato dai raggi uscenti da A nelle direzioni positive degli assi: allora anche sulla direttrice lo zero è limite unico, mentre si ha $f = 1$; sicchè nei punti della direttrice non v'è intercontinuità. Tali punti non sono numerabili.

Il loro insieme, però, è un insieme di punti-frontiera, d'accordo con l'osservazione riportata nella Nota [5]. Di più, esso è di area nulla; e ciò suggerisce un'ulteriore ricerca: se l'insieme I, quando non sia numerabile, sia in tutti i casi di area nulla (se è piano), di volume nullo (se è spaziale), in generale di misura nulla nello spazio in cui varia P.