
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CATALDO AGOSTINELLI

Sopra un caso del problema ristretto dei tre corpi più generale di quello di Hill.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 8
(1953), n.4, p. 377–384.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_4_377_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sopra un caso del problema ristretto dei tre corpi più generale di quello di HILL.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino)

Sunto. - *Si stabiliscono le equazioni del movimento di un satellite attratto da un pianeta e dal Sole con la legge di NEWTON, ritenendo trascurabili: la massa del satellite in confronto di quella degli altri due corpi, l'eccentricità e l'inclinazione dell'orbita relativa del Sole intorno al pianeta, ma tenendo conto della parallasse solare. Si considerano alcune proprietà delle traiettorie periodiche.*

1. Essendo P_0 , P_1 , P tre corpi puntiformi che si attraggono mutuamente con la legge di NEWTON, dette m_0 , m_1 , m le rispettive masse ed $R = P_0P_1$, $\Delta = P_1P$, $r = P_0P$, le mutue distanze, le equa-

zioni del moto relativo di P_1 e P rispetto a P_0 risultano notoriamente ⁽¹⁾

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2(P - P_0)}{dt^2} &= -f(m + m_0) \frac{P - P_0}{r^3} - fm_1 \left(\frac{P - P_1}{\Delta^3} + \frac{P_1 - P_0}{R^3} \right) \\ \frac{d^2(P_1 - P_0)}{dt^2} &= -f(m_0 + m_1) \frac{P_1 - P_0}{R^3} + fm \left(\frac{P - P_1}{\Delta^3} - \frac{P - P_0}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Ora nella teoria del movimento dei satelliti dei pianeti la massa dei satelliti si considera infinitesima in confronto di quella del pianeta e del Sole, tale da non influenzare il moto relativo di questi due ultimi corpi. Allora, se nelle equazioni precedenti P è il satellite, P_0 il pianeta e P_1 il Sole, ponendo $m = 0$, le equazioni (1) diventano

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d^2(P - P_0)}{dt^2} &= -fm_0 \frac{P - P_0}{r^3} - fm_1 \left(\frac{P - P_1}{\Delta^3} + \frac{P_1 - P_0}{R^3} \right) \\ \frac{d^2(P_1 - P_0)}{dt^2} + f(m_0 + m_1) \frac{P_1 - P_0}{R^3} &= 0. \end{aligned}$$

In questo problema *ristretto* dei tre corpi la seconda delle (2) mostra che è compatibile un moto circolare uniforme di P_1 intorno a P_0 con velocità angolare n definita dalla relazione

$$(3) \quad n^2 = f(m_0 + m_1) / R^3,$$

ciò che equivale a trascurare l'inclinazione e l'eccentricità dell'orbita relativa del Sole intorno al pianeta. Riferendoci a questo caso non rimane che da considerare il moto relativo di P intorno a P_0 , definito dalla prima delle (2), nella quale l'ultimo termine sta a rappresentare l'azione perturbatrice del Sole sul detto moto relativo.

Con riferimento ad una terna di assi ortogonali (xyz) con l'origine in P_0 , l'asse x coincidente con la retta P_0P_1 , orientato da P_0 verso P_1 e uniformemente rotante intorno a z con velocità angolare n uguale a quella di P_1 , la prima delle equazioni (2) dà luogo al seguente sistema di equazioni scalari

$$(4) \quad \begin{aligned} x - 2ny - n^2x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Cfr. C. AGOSTINELLI, *Sul problema dei tre corpi*. «Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano», vol. XXI, 1950.

essendo

$$U = \frac{fm_0}{r} + \frac{fm_1}{\Delta} - \frac{fm_1 x}{R^2}.$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \Delta^2 = (R - x)^2 + y^2 + z^2 = R^2 + r^2 - 2Rx.$$

Indicando ancora con θ l'angolo PP_0P_1 , risulta

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \frac{1}{\Delta} = 1 \left[\left(R \sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2}} - 2 \frac{r}{R} \cos \theta \right) \right]$$

e poichè nel moto dei satelliti il rapporto r/R è molto piccolo in confronto dell'unità, si ha mediante serie uniformemente convergente del rapporto $\frac{r}{R}$,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{R} \sum_k \frac{r^k}{R^k} X_k \left(\frac{x}{r} \right)$$

ove X_k è il k^{mo} polinomio di LEGENDRE. Quindi a meno di una costante additiva inessenziale si ha

$$(5) \quad U = \frac{fm_0}{r} + \frac{fm_1}{R} \sum_k \frac{r^k}{R^k} X_k \left(\frac{x}{r} \right).$$

Le equazioni (4) ammettono un unico integrale che è l'integrale di JACOBI:

$$(6) \quad \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2) - U = \text{costante},$$

il quale si ottiene moltiplicando ciascuna delle equazioni (4) rispettivamente per x , y , z e sommando quindi membro a membro.

Se riteniamo trascurabili i termini di ordine superiore al primo nell'inclinazione $z/\sqrt{x^2 + y^2}$, dovremo intendere $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; allora tenendo conto della (5) e ponendo

$$(7) \quad fm_1 = n_1^2 R^3$$

le equazioni (4) diventano

$$(8) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x + fm_0 \frac{x}{r^3} - n_1^2 \sum_k \left[k \frac{r^{k-2}}{R^{k-2}} x X_k \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{r^{k-3}}{R^{k-2}} y^2 X'_k \left(\frac{x}{r} \right) \right] &= 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y + fm_0 \frac{y}{r^3} - n_1^2 \sum_k \left[k \frac{r^{k-2}}{R^{k-2}} y X_k \left(\frac{x}{r} \right) - \frac{r^{k-3}}{R^{k-2}} xy X'_k \left(\frac{x}{r} \right) \right] &= 0 \\ \ddot{z} + fm_0 \frac{z}{r^3} - n_1^2 \sum_k \left[k \frac{r^{k-2}}{R^{k-2}} X_k \left(\frac{x}{r} \right) - \frac{r^{k-3}}{R^{k-2}} x \cdot X'_k \left(\frac{x}{r} \right) \right] z &= 0, \\ (r = \sqrt{x^2 + y^2}). \end{aligned}$$

In questo caso le prime due delle equazioni (8) definiscono le coordinate x, y del satellite P in funzione del tempo, e, determinate mediante la loro integrazione queste incognite, la terza delle (8) risulta un'equazione differenziale del 2° ordine, lineare nella sola incognita z .

Le prime due delle (8) ammettono ancora l'integrale di JACOBI, che, ricordando la (5), risulta

$$(9) \quad \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) - \frac{fm_0}{r} - n_1^2 R \sum_k \frac{r^k}{R^k} X_k \left(\frac{x}{r} \right) = \text{costante}.$$

La terza delle (8) è soddisfatta per $z=0$; perciò se si prescinde dall'inclinazione dell'orbita del satellite P sul piano del moto relativo di P , rispetto a P_0 , non si hanno da considerare che le sole prime due equazioni (8), per le quali sussiste l'integrale (9).

Se ci limitiamo a considerare soltanto il primo termine di ciascuna delle serie che in esse compaiono, ciò che equivale a trascurare la parallasse solare, si hanno le equazioni

$$(10) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} + fm_0 \frac{x}{r^3} - (n^2 + 2n_1^2)x &= 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} + fm_0 \frac{y}{r^3} - (n^2 - n_1^2)y &= 0, \end{aligned}$$

che coincidono con quelle di HILL ⁽²⁾ quando si faccia ancora $n=n_1$, quando cioè si trascura la massa del pianeta in confronto di quella del Sole. A questo riguardo è da osservare però che se questo è lecito nello studio del movimento della Luna essendo la massa della Terra circa 1/333 000 della massa del Sole, non altrettanto lecito sarà quando si studia il movimento di un satellite di Giove, la cui massa è circa 1/100 di quella del Sole.

Casi più generali di quelli di HILL si otterranno considerando ulteriori termini delle serie che figurano nelle equazioni (8), con che si viene a tener conto anche della parallasse solare. Arrestandoci ai primi due termini abbiamo le equazioni

$$(11) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} + fm_0 \frac{x}{r^3} - (n^2 + 2n_1^2)x - \frac{3n_1^2}{2R}(2x^2 + y^2) &= 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} + fm_0 \frac{y}{r^3} - (n^2 - n_1^2)y + \frac{3n_1^2}{R}xy &= 0. \end{aligned}$$

⁽²⁾ G. G. HILL, *Researches in the Lunar Theory*. « American Journal of Mathematics », vol. I, pp. 5-26, 129-147, 245-260, a 1878.

Ponendo

$$(12) \quad \Omega = \frac{fm_0}{r} + \frac{1}{2}(n' - n_1^2)(x^2 + y^2) + \frac{3}{2}n_1^2x^2 + \frac{n_1^2}{R}\left(x^3 - \frac{3}{2}xy^2\right)$$

esse si possono scrivere

$$(12') \quad \ddot{x} - 2ny = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2nx = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

e l'integrale di JACOBI per queste equazioni risulta

$$(13) \quad \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \Omega + C = 0, \quad (C = \text{costante}).$$

Le equazioni (11), come del resto le equazioni (8), sotto certe condizioni, ammettono in base a noti teoremi di POINCARÉ⁽³⁾, infinite soluzioni periodiche. In un altro lavoro saranno determinate esplicitamente le condizioni per l'esistenza di queste soluzioni periodiche. In questa nota mi limito a dedurre alcune proprietà delle traiettorie periodiche del sistema (11) che come ho osservato è più generale di quello di HILL, poichè in esso si tien conto della parallasse solare.

Intanto, poichè le equazioni (11) si mutano in se stesse cambiando y e t in $-y$ e $-t$, e lasciando inalterata la x , contando i tempi a partire da un istante in cui il satellite attraversa l'asse x , si deduce che le traiettorie periodiche sono simmetriche rispetto all'asse x . Esse non sono più simmetriche rispetto all'asse y , poichè cambiando nelle (11) x in $-x$, t in $-t$, lasciando inalterata la y , queste equazioni non si mutano più in se stesse.

Inoltre le dette traiettorie periodiche comportano delle congiunzioni e delle opposizioni in cui il satellite attraversa ortogonalmente ad ogni semiperiodo l'asse x alternativamente nei due sensi; ma queste posizioni non sono simmetriche rispetto a P_0 .

Le traiettorie periodiche varieranno al variare della costante C dell'integrale (13) di JACOBI, e, come nel caso di HILL, vi sarà un valore C_0 della costante C per cui la traiettoria presenterà due punti di regresso, simmetrici rispetto all'asse x , con tangente cuspidale parallela all'asse y , ma non più appartenenti a quest'asse. Per caratterizzare questi punti osserviamo che se indichiamo con x_0, y_0 le coordinate di uno di questi punti (quello dalla parte delle y positive), e contiamo i tempi a partire da un istante in cui il satellite P si trova in questa posizione, in quell'istante avremo

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \ddot{x} = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0.$$

⁽³⁾ H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, t. I, Chap. III, n. 37-38. (Paris, Gauthier-Villars, 1892).

L'integrale (13) porge allora

$$(14) \quad \frac{fm_0}{r_0} + \frac{1}{2}(n^2 - n_1^2)(x_0^2 + y_0^2) + \frac{3}{2}n_1^2x_0^2 + \frac{n_1^2}{R}(x_0^3 - \frac{3}{2}x_0y_0^2) = C_0, \\ (r_0^2 = x_0^2 + y_0^2),$$

cioè il punto cuspidale richiesto apparterrà a una *curva limite* (quella di equazione $\Omega = C_0$), che sono curve algebriche dell'ottavo ordine.

Per la prima delle equazioni (11) avremo inoltre

$$(15) \quad \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_0 = (n^2 + 2n_1^2)x_0 + \frac{3n_1^2}{2R}(2x_0^2 - y_0^2) - \frac{fm_0x_0}{r_0^3} = 0$$

che a sua volta rappresenta una curva algebrica del 10° ordine, passante per l'origine. Dunque, se una traiettoria periodica, corrispondente a un certo valore C_0 della costante C dell'integrale di JACOBI, ha una cuspidale con tangente parallela all'asse y , questo punto (x_0, y_0) sarà comune alle due curve algebriche (14) e (15). Ad essa corrisponde una cuspidale simmetrica rispetto all'asse x .

Nel caso di HILL le orbite periodiche cuspidate, dette di *massima lunazione*, hanno i punti di regresso sull'asse y . Nel nostro caso, che differisce da quello di HILL per la considerazione nelle equazioni del moto di ulteriori termini che dipendono dalla parallasse solare, quei punti saranno poco discosti dall'asse y , cioè x_0 sarà molto piccolo in confronto di y_0 . Inoltre, se osserviamo che x_0 tenderà a zero col tendere di $\frac{1}{R}$ a zero ed y_0 tenderà al valore y_0^0 che ha l'ordinata della cuspidale nel caso di HILL, dalla (15), a meno di termini di ordine superiore al primo in $\frac{1}{R}$, si ricava (per $y_0^0 > 0$):

$$(16) \quad x_0 = \frac{3n_1^2}{2R} y_0^{02} \left[n^2 + 2n_1^2 - \frac{fm_0}{y_0^{03}} \right]$$

che dà lo scostamento dall'asse y dei punti di regresso delle orbite cuspidate, per effetto della parallasse solare.

Se consideriamo ora i punti stazionari situati sull'asse x e distinti dall'origine, caratterizzati dalle relazioni

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \quad y = 0$$

e indichiamo con $|\bar{x}|$ il valore assoluto dell'ascissa di questi punti, a meno di termini di ordine superiore al primo in $\frac{1}{R}$ si ha

$$|\bar{x}| = |\bar{x}_0| \left(1 - \frac{n_1^2}{n^2 + 2n_1^2} \frac{|\bar{x}_0|}{R} \right),$$

ove

$$|\bar{x}_0| = \sqrt[3]{\frac{fm_0}{n^2 + 2n_1^2}}$$

è il valore di $|\bar{x}|$ quando si trascura la parallasse solare.

Allora la (16) si può scrivere anche

$$(16') \quad x_0 = \frac{3n_1^2}{2(n^2 + 2n_1^2)} \frac{y_0^{02}}{R} \left/ \left(1 - \frac{x_0^3}{y_0^{03}} \right) \right.$$

Nel caso dei satelliti di HILL è all'incirca $|\bar{x}^0| = \frac{1}{100} R$, ed y_0^0 è pressapoco uguale a sei volte il raggio vettore della Luna: ne segue che $\bar{x}_0^1/y_0^0$ è dell'ordine di 0.65. Lo spostamento dei punti di regresso avviene dunque dalla parte delle x positive, cioè dalla parte del Sole.

È opportuno osservare ancora che al di fuori della traiettoria periodica cuspidata vi saranno, come nel caso dei satelliti di HILL, (4) delle traiettorie periodiche infinitamente vicine alla precedente, ciascuna con due nodi simmetrici rispetto all'asse x .

Invero, consideriamo una soluzione particolare delle equazioni (11) del movimento in cui all'istante iniziale il punto mobile occupi una posizione molto vicina al punto di regresso della traiettoria precedente, le cui coordinate indicheremo ora con x_0^* , y_0^* , e supponiamo che inizialmente la velocità sia diretta perpendicolarmente all'asse y . Porremo pertanto

$$x = x_0 = x_0^* + \varepsilon, \quad y = y_0 = y_0^* + \eta, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = 0, \quad \text{per } t = 0,$$

essendo ε , η , $\dot{x}_0$ quantità molto piccole. Allora per ε , η , $\dot{x}_0$, t molto piccoli, le coordinate x , y del punto mobile saranno sviluppabili secondo le potenze di queste variabili. Avremo dunque:

$$(17) \quad x - x_0 = \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{x}_0 t^2 + \frac{1}{6} \dddot{x}_0 t^3 + \dots$$

e, senza errore sensibile, per t molto piccolo possiamo trascurare nel 2° membro i termini di ordine superiore a t^3 . Inoltre, calcolando $\ddot{x}_0$, ed $\ddot{y}_0$, servendosi delle equazioni (11) del moto, e tenendo conto della (15), si riconosce che $\ddot{x}_0$ è dell'ordine di ε ed η , mentre a meno di termini in $\dot{x}_0$, ε , η è

$$\ddot{x}_0 = 2n\ddot{y}_0^*$$

(4) Cfr. H. POINCARÉ, *loco citato*, n. 41.

essendo

$$\ddot{y}_0^* = -\frac{fm_0 y_0^*}{r_0^{*3}} + (n^2 - n_1^2)y_0^* - \frac{3n_1^2}{R} x_0^* y_0^*, \quad (r_0^{*2} = x_0^{*2} + y_0^{*2}).$$

Allora trascurando ancora nel secondo membro della (17) i termini in εt^2 , ηt^2 , $\dot{x}_0 t^3$, abbiamo

$$x - x_0 = \dot{x}_0 t - \frac{1}{3} n \left[fm_0 \frac{y_0^*}{r_0^{*3}} - (n^2 - n_1^2)y_0^* + \frac{3n_1^2}{R} x_0^* y_0^* \right] t^3,$$

o più semplicemente, essendo n^2 ed n_1^2 pressochè eguali, e trascurando il termine che dipende dalla parallasse solare, per t molto piccolo possiamo scrivere

$$(18) \quad x - x_0 = \dot{x}_0 t - \frac{1}{3} n \cdot fm_0 \frac{y_0^*}{r_0^{*3}} t^3.$$

Ora, per le orbite interne a quella cuspidata, ma molto vicine ad essa, la $\dot{x}_0$ è negativa e per piccoli valori di t la differenza $x - x_0$ non può annullarsi che per $t = 0$, la retta $x = x_0$ incontrerà la traiettoria in un solo punto. Al contrario per $\dot{x}_0 > 0$, e per piccoli valori di t la $x - x_0$ si annulla per $t = 0$, e per due valori di t prossimi ai valori

$$\pm r_0^* \sqrt{\frac{3x_0}{fm_0 \cdot n} \cdot \frac{r_0^*}{y_0^*}}.$$

Ci sono dunque tre istanti molto vicini in corrispondenza di ciascuno dei quali la traiettoria è intersecata dalla retta $x = x_0$. La traiettoria presenta un nodo, e per la simmetria rispetto all'asse x essa avrà un altro nodo simmetrico del precedente rispetto a quest'asse.