Enrico Bompiani

Connessioni affini e geometria riemanniana.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.4, p. 363–368.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_4_363_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Connessioni affini e geometria riemanniana.

Nota di ENRICO BOMPIANI (a Roma)

Sunto. - *Si esaminano condizioni intrinseche atte a determinare metriche riemanniane approssimanti una connessione affine non simmetrica (il caso simmetrico essendo stato già esaminato in altro lavoro).*

1. Richiami e oggetto della Nota.

In una Nota dallo stesso titolo [1] mi sono occupato del confronto fra uno spazio a connessione affine X_n e uno spazio riemanniano, ricercando se e fino a qual punto e con quale arbitrarietà si possa sostituire uno all'altro.

Precisamente ho dimostrato quanto segue [2]:

Data una connessione di componenti $L^i_{hk}(x) = \Gamma^i_{hk} + \Omega_{hk}^{\cdot\cdot i}$ ($\Gamma^i_{hk} = \Gamma^i_{kh}$ *connessione simmetrica associata;* $\Omega_{hk}^{\cdot\cdot i} = -\Omega_{kh}^{\cdot\cdot i}$ *tensore di torsione*) *e una metrica riemanniana* $g_{hk}(x)$, *i cui simboli di Christoffel (o componenti della connessione determinata dalla metrica) s'indicano con* G^i_{hk}, *condizioni necessarie e sufficienti affinchè:*

1) L^i_{hk} *e* g_{hk} *abbiano le stesse traiettorie (o geodetiche),*

2) L^i_{hk} *sia euclidea rispetto a* g_{hk}, *cioè il modulo di un qualsiasi vettore (misurato con* g_{hk}*) si conservi nel trasporto eseguito con* L^i_{hk},

[1] E. BOMPIANI, *Connessioni affini e geometria riemanniana*, Rend. di Matematica e delle sue applicazioni, (5), 10, (1951), p. 391-405. Si veda pure la Nota di A. COSSU - *Alcune osservazioni sul confronto tra connessioni affini e metriche riemanniane*, Rend. Acc. Lincei, (8), 14 (1953), p, 29-35.

[2] Gli indici i, h, k, ... variano da 1 ad n.

sono :

$$\Gamma^i_{hk} = G^i_{hk}, \qquad \Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} g_{k)r} = 0. \tag{1.1}$$

Per tali connessioni è nullo il tensore di Einstein, $\Omega_l = \Omega_{lr}^{\cdot\cdot r}$.

Limitandomi poi alle connessioni simmetriche ($\Omega_{ih}^{\cdot\cdot i} = 0$) ho dimostrato che:

Dato un punto $\overset{\circ}{x}$ *nello spazio a connessione affine (simmetrica) e in esso un tensore* $\overset{\circ}{g}_{hk}$ *(simmetrico arbitrario) è possibile costruire (in modo unico) un campo di tensori* $g_{hk}(x)$ *fino all'intorno del 2° ordine di* $\overset{\circ}{x}$ *tale che sia* $g_{hk}(\overset{\circ}{x}) = \overset{\circ}{g}_{hk}$ *e*

1) *siano soddisfatte le condizioni* 1), 2) *dell'enunciato precedente (fino a quell'intorno; quindi coincidano gli* E_2 *geodetici di* Γ^i_{hk} *e di* g_{hk} *uscenti da* $\overset{\circ}{x}$*)*

2) *la curvatura affine di ogni 2-giacitura, definita a partire dal tensore (in* $\overset{\circ}{x}$*)*:

$$\Gamma_{lk,hj} = \partial_k \Gamma_{lh,j} - \partial_l \Gamma_{kh,j} + (\Gamma_{kh,p}\Gamma_{lj,q} - \Gamma_{hl,p}\Gamma_{kj,q})\overset{\circ}{g}{}^{pq}$$

con

$$\Gamma_{lh,j} = \Gamma^i_{lh}\overset{\circ}{g}_{ij}$$

coincida con la curvatura riemanniana della stessa giacitura.

La differente natura dei due spazi si manifesta invece nello stesso intorno del 3° ordine di $\overset{\circ}{x}$ se si prende in esame la *curvatura mista* di due giaciture.

È nella natura delle cose che se fra le condizioni di confronto fra spazi a connessione affine e metrica riemanniana s'impone una condizione relativa agli elementi di geodetiche (che dipendono dalla sola connessione simmetrica associata) non si possano ottenere che teoremi riguardanti le connessioni simmetriche.

Se si vogliono risultati relativi a connessioni asimmetriche bisogna abbandonare quella condizione: ed è appunto quello che qui mi propongo di fare.

2. Determinazione in un punto di una metrica rispetto alla quale la connessione data è euclidea.

La condizione (dovuta allo SCHOUTEN) affinchè L^i_{hk} sia euclidea rispetto alla metrica g_{hk} è

$$\Gamma^i_{hk} = \overset{*}{G}{}^i_{hk} + 2\Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} g_{k)r} g^{li} \tag{2.1}$$

ove $\overset{*}{G}{}^i_{hk}$ sono i simboli di CHRISTOFFEL relativi a g_{hk}.

Il motivo (e la necessità) del cambiamento di notazione per tali simboli è il seguente. Poichè si suppone dato il tensore metrico $\overset{\circ}{g}_{hk}$ *soltanto* in $\overset{\circ}{x}$ (e non un campo) e poichè i simboli di CHRISTOFFEL dipendono dalle derivate delle g_{hk} in $\overset{\circ}{x}$, cioè dal *campo* di tensori $g_{hk}(x)$ nell'intorno del 1° ordine di $\overset{\circ}{x}$, tali simboli dipendono dalle condizioni con cui si determina tale campo (e quindi *bisogna* adottare notazioni differenti per condizioni differenti di determinazione del campo).

Le condizioni imposte nel n. 1 danno (cfr. le prime 1.1)

$$G^i_{hk} = \Gamma^i_{hk} \tag{2.2}$$

e quindi per le derivate (che definiscono il campo nell'intorno del 1° ordine di $\overset{\circ}{x}$) si hanno le espressioni

$$\partial_l g_{hk} = 2\Gamma^r_{l(h}\overset{\circ}{g}_{k)r} \qquad in\ \overset{\circ}{x} \tag{2.3}$$

Se invece s'impone la condizione di euclidicità (2.1) si ha

$$\overset{*}{G}{}^i_{hk} = \Gamma^i_{hk} - 2\Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} g_{k)r} g^{li} \tag{2.4}$$

da cui si ricavano le derivate (in $\overset{\circ}{x}$)

$$\begin{aligned} \overset{*}{\partial}_l g_{hk} &= \overset{*}{G}_{lh,k} + \overset{*}{G}_{lk,h} = \overset{*}{G}{}^r_{lh}\overset{\circ}{g}_{kr} + \overset{*}{G}{}^r_{lk}\overset{\circ}{g}_{hr} = 2\overset{*}{G}{}^r_{l(h}\overset{\circ}{g}_{k)r} = \\ &= 2\Gamma^r_{l(h}\overset{\circ}{g}_{k)r} + 2\Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r}\overset{\circ}{g}_{k)r} = L^r_{l(h}\overset{\circ}{g}_{k)r}, \qquad in\ \overset{\circ}{x} \end{aligned} \tag{2.5}$$

e perciò confrontando con la 2.3

$$\overset{*}{\partial}_l g_{hk} - \partial_l g_{hk} = 2\Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r}\overset{\circ}{g}_{k)r}. \tag{2.6}$$

Intanto la 2.5 mostra che:

Una connessione è euclidea in un punto rispetto ad una metrica se e solo se il campo di questa (nell'intorno del 1° ordine del punto) è determinato per spostamento parallelo della metrica rispetto alla connessione.

Naturalmente i due diversi campi definiti dalle (2.3) e (2.5) nell'intorno del 1° ordine di $\overset{\circ}{x}$ danno luogo, per ogni direzione dx^i a due diversi E_2 geodetici (riferentisi all'una o all'altra metrica). Due tali E_2 tangenti hanno una *giacitura principale* [3], invariante topologico dei due elementi, che è determinata dalla direzione data e dall'altra

$$p^i = \Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r}\overset{\circ}{g}_{k)r}\overset{\circ}{g}{}^{li} dx^h dx^k. \tag{2.7}$$

[3] E. BOMPIANI. *Topologia differenziale. - I. Enti topologici determinati da elementi differenziali di curve*, « Rend. Acc. Lincei », (8), 8 (1950), p. 1-8, n. 3.

Di più questa direzione è ortogonale alla data (in $\overset{\circ}{x}$); infatti la condizione d'ortogonalità (in $\overset{\circ}{x}$)

$$0 = \overset{\circ}{g}_{ij} p^i dx^j = \Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} \overset{\circ}{g}_{k)r} dx^h dx^k dx^l =$$
$$= \Omega_{(lh}^{\cdot\cdot r} g_{k)r} dx^h dx^k dx^l$$

è soddisfatta a causa dell'emisimmetria di $\Omega_{lh}^{\cdot\cdot r}$.

Si può quindi enunciare il teorema:

Se si assegna in un punto $\overset{\circ}{\mathrm{x}}$ *di uno spazio a connessione affine asimmetrica un tensore* $\overset{\circ}{\mathrm{g}}_{\mathrm{hk}} = \overset{\circ}{\mathrm{g}}_{\mathrm{kh}}$ *si determinano nell'intorno del 1° ordine di* $\overset{\circ}{\mathrm{x}}$ *due diverse metriche; gli* E_2 *geodetici relativi ad esse e ad una direzione* dx^i *hanno una giacitura principale determinata dalla direzione* dx^i *e dalla direzione normale ad essa* p^i *data dalla* (2.7).

S'intende che ciò vale quando la direzione p^i non risulti indeterminata. Le direzioni dx^i per cui p^i è indeterminata devono soddisfare alle n condizioni

$$\Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} g_{k)r} \overset{\circ}{g}{}^{li} dx^h dx^k = 0$$

ma in generale *non* ne esistono. Al contrario essa è *sempre* indeterminata se e solo se

$$\Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} \overset{\circ}{g}_{k)r} = 0$$

cioè per le particolari connessioni caratterizzate nel primo enunciato del n. 1.

3. Determinazioni intrinseche di direzioni.

Ci si può servire della p^i associata dal tensore $\Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} \overset{\circ}{g}_{k)r}$ ad una direzione per caratterizzare in modo invariante direzioni per $\overset{\circ}{x}$.

Se il vettore covariante di EINSTEIN $\Omega_l \equiv \Omega_{lr}^{\cdot\cdot r}$, caratterizzante una $(n-1)$-giacitura, non è nullo si può chiedere per quali direzioni dx^i la direzione p^i riesca ortogonale alla giacitura cioè le p^i siano proporzionali alle $\Omega_l g^{li}$, o anche che siano proporzionali le loro componenti covarianti

$$\Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} \overset{\circ}{g}_{k)r} dx^h dx^k , \qquad \Omega_l ; \tag{3.1}$$

ossia devono essere soddisfatte le condizioni

$$\Omega_{[i} \Omega_{j](h} \overset{\circ}{g}_{k)r} dx^h dx^k = 0. \tag{3.2}$$

Queste equazioni sono in numero di $n-1$ indipendenti, almeno in generale e quindi esiste in generale un numero *finito* di direzioni soddisfacenti alla condizione posta (comuni ai coni quadrici precedenti).

Ci si può chiedere quando *tutte* le direzioni per $\overset{\circ}{x}$ sono della specie voluta.

Ciò accade se e solo se si può scrivere

$$\Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} g_{k)r} dx^h dx^k = \Omega_l \alpha_{hk} dx^h dx^k$$

identicamente nelle dx^i, cioè

$$\Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} \overset{\circ}{g}_{k)r} = \Omega_l \alpha_{hk}\,. \tag{3.3}$$

Moltiplicate queste per $\overset{\circ}{g}{}^{ks}$ si ha

$$\Omega_{lh}^{\cdot\cdot s} + \Omega_{lk}^{\cdot\cdot r} \overset{\circ}{g}{}^{ks} \overset{\circ}{g}_{hr} = 2\Omega_l \alpha_{hk} \overset{\circ}{g}{}^{ks} \tag{3.4}$$

e contraendo per $h = s$

$$\Omega^l = \Omega^l \alpha_{hk} \overset{\circ}{g}{}^{hk}\,. \tag{3.5}$$

D'altra parte moltiplicando le (3.4) per g^{lh}, tenuto conto che $\Omega_{lh}^{\cdot\cdot s} g^{lh} = 0$ per l'emisimmetria delle $\Omega_{lh}^{\cdot\cdot s}$, si ha

$$\Omega_l \{ \delta_k^l + 2\alpha_{hk} \overset{\circ}{g}{}^{hl} \} = 0.$$

Se non è $\Omega_l = 0$, le condizioni

$$\alpha_{hk} \overset{\circ}{g}{}^{hl} = -\frac{1}{2} \delta_k^l$$

portano $\alpha_{hk} = -\frac{1}{2} \overset{\circ}{g}_{hk}$, quindi $\alpha_{hk} g^{hk} = -\frac{1}{2} n$ e quindi ritornando alla (3.5). $(n+2)\Omega_l = 0$ cioè $\Omega_l = 0$ e per la (3.3)

$$\Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} \overset{\circ}{g}_{k)r} = 0\,;$$

cioè *non esistono spazi tali che la direzione* p^i *associata ad ogni direzione* dx^i *sia ortogonale alla* (n — 1)*-giacitura di Einstein a meno che questa e quella riescano indeterminate* (cioè si ritorna agli spazi caratterizzati nel primo teorema del n. 1).

Un'altra condizione invariante è che la direzione p^i associata alla direzione dx^i appartenga alla giacitura di EINSTEIN (purchè questa non sia indeterminata); cioè

$$\Omega_i p^i = \Omega_i \Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} \overset{\circ}{g}_{k)r} \overset{\circ}{g}{}^{li} dx^h dx^k = 0.$$

Assegnata in un punto la metrica $\overset{\circ}{\mathrm{g}}_{\mathrm{hk}}$ *esiste un cono quadrico di direzioni, con vertice in esso, tali che le direzioni* p^i *associate a quelle stanno nella giacitura di Einstein* (se questa è determinata).

Il tensore doppio simmetrico

$$\omega^{hk} = \Omega_i \Omega_{l(h}^{\cdot\cdot r} g_{k)r} g^{li}$$

definito nello stesso intorno di $\overset{\circ}{x}$ in cui è definito il tensore g_{hk}, fornisce, in quell'intorno, una nuova metrica: e dal confronto delle due metriche si hanno nuovi invarianti dipendenti dal tensore di torsione della connessione (e da $\overset{\circ}{g}_{hk}$).