Bollettino
Unione Matematica Italiana

Antonio Colucci

Generale maggiorazione dei polinomi e delle derivate e una sua conseguenza.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 258–260.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_258_0>

Generale maggiorazione dei polinomi e delle derivate e una sua conseguenza.

Nota di ANTONIO COLUCCI (a Napoli)
da una lettera al Prof. M. PICONE

Sunto. - *Lo scopo della Nota è dichiarato nel primo capoverso.*

. . . .

La lettura della Sua interessante Nota dal titolo: « *Una semplicissima formola di maggiorazione per i polinomi di Legendre e per le loro derivate* », apparsa da pochi giorni nel Bollettino (1), mi ha offerto l'occasione, assai gradita, di osservare una formola di maggiorazione valida per un polinomio qualunque e le sue derivate.

Si tratta del teorema seguente:

Se le radici di un polinomio, a coefficienti complessi, nella variabile complessa z :

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

sono, in modulo, non maggiori di un numero ρ, *sussiste la formola di maggiorazione:*

$$|P^{(k)}(z)| \leq k! \binom{n}{k} |a_0| (|z| + \rho)^{n-k}$$

dove $k = 0, 1, 2, \dots, n$ *e* $P^{(0)}(z) = P(z)$.

La dimostrazione è estremamente elementare.

Invero, indicando con z_r gli zeri di $P(z)$, si ha:

$$P^{(k)}(z) = \Sigma\, k!\, a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-k})$$

(1) Bollettino Un. Mat. It. (3), VIII (1953), pp. 1-2.

dove la somma s'intende estesa alle combinazioni di classe $(n-k)$ delle z_r.

Da ciò e dal fatto che

$$|z-z_r| \leq |z| + \rho$$

segue subito:

$$|P^{(k)}(z)| \leq k! \binom{n}{k} |a_0| (|z|+\rho)^{n-k}.$$

Alla conclusione si perviene anche in modo rapido ricordando che *se gli zeri di* P(z) *sono, in modulo, non maggiori di* ρ, *lo stesso si verifica per quelli di* $P^{(k)}(z)$.

Nel caso del polinomio di LEGENDRE di grado n si ha $a_0 = \frac{(2n-1)!!}{n!}$, e si può fare $\rho = 1$ (qualunque sia n), con che si ritrova la Sua formola di maggiorazione.

Questa, peraltro, può essere migliorata assumendo $\rho = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$ (*)

Se $P(z)$ coincide col polinomio di HERMITE:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right),$$

riesce $a_0 = 1$, e si può porre $\rho = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$. (**)

L'osservazione precedente mi ha condotto, in modo assai naturale, al teorema seguente:

Se gli zeri dei polinomi:

$$P_n(z) = p_{n,n} z^n + \ldots + p_{n,1} z + p_{n,0}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *sono in modulo non maggiori di* ρ, *e la successione*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

è tale che

$$\lim{}'' |a_n p_{n,n}|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R},$$

con R *finito e maggiore di* ρ, *allora la serie.*

(1)... $$a_1 P_1(z) + a_2 P_2(z) + \ldots + a_n P_n(z) + \ldots$$

(*) Cfr. A. COLUCCI, *Su qualche proprietà dei polinomi di Legendre*, « Bollettino Un. Mat. Italiana », (3), 5 (1950), pp. 289-292.

(**) Cfr. APPELL - KAMPE DE FERIET, *Fonctions hypergéometriques et hypersphériques, Polynomes de Hermite*, (Paris 1926), p. 337.

rappresenta una funzione f(z) *olomorfa nell'interno del cerchio di centro* z $=0$ *e raggio* R $-\rho$, *e si ha:*

$$f^{(k)}(z) = a_k P_k^{(k)}(z) + a_{k+1} P_{k+1}^{(k)}(z) + \dots \qquad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Notoriamente la condizione $\lim'' | a_n p_{n,n} |^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$ implica che il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_n^{1,\infty} a_n p_{n,n} z^n$ è R. Da ciò e dalla diseguaglianza:

$$| a_n P_n^{(k)}(z) | \leq k! \binom{n}{k} | a_n p_{n,n} | \cdot (| z | + \rho)^{n-k}$$

segue che la serie:

$$(2) \dots \qquad a_k P_k^{(k)}(z) + \dots + a_n P_n^{(k)}(z) + \dots$$

$(k = 0, 1, 2, \dots, a_0 = 0)$ è uniformemente convergente in un qualunque cerchio C_1 di centro $z=0$ e raggio $R_1 < R - \rho$.

Pertanto detta $f(z)$ la somma della (1) in tale cerchio, quella della (2) risulta data da $f^{(k)}(z)$, ed il teorema è completamente dimostrato.

Naturalmente, una volta constatata la convergenza uniforme della (1) nel cerchio C_1, si può giungere alla conclusione anche applicando il teorema di WEIERSTRASS sulle serie di funzioni olomorfe.

. . . .