Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Sulla geometria differenziale conforme delle trasformazioni puntuali fra due piani.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 252–258.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_252_0>

Sulla geometria differenziale conforme delle trasformazioni puntuali fra due piani.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna)

Sunto. - *Si studiano le trasformazioni puntuali fra due piani euclidei dal punto di vista differenziale conforme.*

1. Nel presente lavoro si studiano le trasformazioni puntuali, fra piani euclidei, dal punto di vista differenziale conforme [1].

[1] Per la geometria differenziale conforme delle curve e superficie ricordo il volume di W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, III: *Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln*, Berlin, Springer (1930).

Nel n. 2, considerando riferimenti tetraciclici (²) mobili, mostro come si possano fissare intrinsecamente siffatti riferimenti ed ottenere così un sistema completo di invarianti conformi per la trasformazione. Nell'intorno del primo ordine di una coppia di punti corrispondenti si incontra già un invariante conforme, che ho chiamato il *coefficiente di dilatazione angolare*, collegabile assai semplicemente ai noti invarianti metrici relativi a quell'intorno (coefficienti di dilatazione lineare).

Nel n. 3 introduco (in ciascun piano) un sistema di curve covarianti per la trasformazione, che chiamo curve C, le quali costituiscono un sistema ∞^2 in generale, ma si riducono (in un certo senso) ad ∞^1 soltanto per le trasformazioni conformi (e per quelle soltanto) ed infine sono indeterminate per le affinità circolari. La considerazione delle predette curve conduce poi, nel n. 4, alla determinazione delle trasformazioni che mutano ∞^2 circonferenze in circonferenze. Si trova che: *Le uniche trasformazioni che mutano ∞^2 circonferenze in circonferenze sono quelle che si ottengono ponendo una corrispondenza omografica fra le rette di un piano ed una rete qualunque di circonferenze dell'altro piano* (³) *e le trasformazioni loro prodotto (a meno, naturalmente, di affinità circolari).*

2. Ricordo (⁴) che un sistema di riferimento tetraciclico in un piano euclideo π è determinato da due circonferenze ortogonali A_1, A_2 e dai loro due punti intersezione A_0, A_3 considerati circonferenze di raggio nullo. Le quattro circonferenze A_i si supporanno normalizzate nel modo espresso dalle seguenti relazioni:

$$(1) \qquad (A_1A_1) = (A_2A_2) = (A_0A_3) = 1$$

$$(A_1A_2) = (A_1A_3) = (A_2A_3) = (A_1A_0) = (A_2A_0) = 0$$

(²) Per le nozioni e notazioni che qui si adopereranno si veda: E CARTAN, *Les éspaces a connexion conforme*, « Ann. Soc. Polonaise Math. » *2*, 171-221 (1923). Osservo anche che la geometria delle trasformazioni puntuali fra due piani conformi si può interpretare come geometria delle corrispondenze fra due quadriche di S_3 proiettivi.

(³) Le trasformazioni che mutano le rette di un piano in circonferenze sono state determinate da B. SEGRE, *Generalizzazione di un teorema di Beltrami*, « Boll. Un. Mat. Ital. », 3 (4), 16-22, (1949). Trasformazioni analoghe fra spazi sono state considerate in B. SEGRE, *Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante*, « Acc. Naz. Lincei, Rend. », 8 (6) 393-397, 547-550, 660-667 e 8 (7), 12-15 (1949).

(⁴) Cfr. la (²).

dove, al solito, $(A_i A_j)$ indica il *prodotto scalare* (5) delle due circonferenze A_i, A_j. Per un riferimento tetraciclico mobile $A_0, \dots . A_3$ valgono le formule:

$$dA_i = \omega^0{}_i A_0 + \omega^1{}_i A_1 + \omega^2{}_i A_2 + \omega^3{}_i A_3, \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{2}$$

dove le $\omega^j{}_i$ sono forme di PFAFF. Ma in virtù delle (1) si avrà:

$$\omega^3{}_0 = \omega^0{}_3 = \omega^1{}_1 = \omega^2{}_2 = 0, \qquad \omega^2{}_1 + \omega^1{}_2 = 0,$$

$$\omega^3{}_3 + \omega^0{}_0 = \omega^1{}_0 + \omega^3{}_1 = \omega^2{}_0 + \omega^3{}_2 = \omega^1{}_3 + \omega^0{}_1 = \omega^2{}_3 + \omega^0{}_2 = 0\,; \tag{3}$$

soltanto le sei forme $\omega^1{}_0$, $\omega^2{}_0$, $\omega^0{}_0$, $\omega^0{}_1$, $\omega^0{}_2$, $\omega^2{}_1$ risultano dunque indipendenti. Notoriamente, esprimendo che gli integrali $\int dA_i$, estesi ad un contorno chiuso arbitrario, sono nulli, si ottengono le *equazioni di struttura di* E. CARTAN che forniscono i differenziali esterni delle forme $\omega^j{}_i$. Si ha:

$$\begin{aligned}
&[d\omega^0{}_0] = [\omega^1{}_0\omega^0{}_1] + [\omega^2{}_0\omega^0{}_2],\\
&[d\omega^i{}_0] = [\omega^0{}_0\omega^i{}_0] + [\omega^j{}_0\omega^i{}_j],\\
&[d\omega^0{}_i] = [\omega^0{}_i\omega^0{}_0] + [\omega^j{}_i\omega^0{}_j],\\
&[d\omega^2{}_1] = [\omega^1{}_0\omega^0{}_2] - [\omega^2{}_0\omega^0{}_1].
\end{aligned} \qquad (i,\ j = 1,\ 2) \tag{4}$$

Consideriamo ora fra π ed un altro piano, $\bar{\pi}$ una trasformazione T e sia $B_0, \dots, B_3$ un riferimento tetraciclico mobile di $\bar{\pi}$ (analogo a quello di π). Siano A_0, B_0 punti corrispondenti in T costituenti una coppia regolare. Indichiamo con $\tau^j{}_i$ le forme di PFAFF, analoghe alle $\omega^j{}_i$, ma relative al piano $\bar{\pi}$; in conseguenza della T si avrà, come è subito visto,

$$\tau^1{}_0 = \alpha_{11}\omega^1{}_0 + \alpha_{12}\omega^2{}_0, \qquad \tau^2{}_0 = \alpha_{21}\omega^1{}_0 + \alpha_{22}\omega^2{}_0 \tag{5}$$

con

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12} \\ \alpha_{21}\alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Supponiamo che T non sia tale che ad una sola delle direzioni isotrope uscenti da A_0 in π corrisponda una direzione isotropa uscente da B_0 in $\bar{\pi}$ (6). Allora si vede subito che si possono scegliere i riferimenti sì che risulti:

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0, \qquad \alpha_{22} = 1\,;$$

posto $\alpha_{11} = \alpha$ si ha allora:

$$\tau^1{}_0 = \alpha\omega^1{}_0, \qquad \tau^2{}_0 = \omega^2{}_0$$

(5) Cfr. la Memoria citata in (2). Se le equazioni, in coordinate cartesiane ortogonali, di due circonferenze A, B sono: $\alpha_0(x^2 + y^2) + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0$, $\beta_0(x^2 + y^2) + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 = 0$, si ha:

$$(AB) = \frac{1}{4}\,|\, \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - 2\alpha_0\beta_3 - 2\alpha_3\beta_0 \,|\,.$$

(6) Manifestamente le trasformazioni escluse sono di tipo particolare e non si presentano nel campo reale.

e, per differenziazione esterna, poi:

$$d\alpha + \alpha(\omega^0{}_0 - \tau^0{}_0) = \lambda\omega^1{}_0 + \mu\omega^2{}_0$$

$$\begin{aligned} &\alpha\omega^2{}_1 - \tau^2{}_1 = \mu\omega^1{}_0 + \nu\omega^2{}_0 \\ (7) \qquad &\alpha\tau^2{}_1 - \omega^2{}_1 = l\omega^1{}_0 + m\omega^2{}_0 \\ &\omega^0{}_0 - \tau^0{}_0 = m\omega^1{}_0 + n\omega^2{}_0 . \end{aligned}$$

Dalle (7) risulta che α (certamente $\neq 0$) è un invariante assoluto di T legato all'intorno del 1° ordine della coppia A_0, B_0. Chiameremo α il *coefficiente di dilatazione angolare* di T; esso fornisce il rapporto (costante per una coppia di punti corrispondenti) dei coefficienti angolari di due direzioni corrispondenti rispetto alle direzioni $\omega^2{}_0 = 0$, $\tau^2{}_0 = 0$, rispettivamente. Quanto alle direzioni $\omega^1{}_0 = 0$, $\omega^2{}_0 = 0$ (e le corrispondenti $\tau^1{}_0 = 0$, $\tau^2{}_0 = 0$) esse sono le *direzioni principali* di T, note anche nelle geometria metrica differenziale (7). Se, e solo se, $\alpha^2 = 1$ la T è conforme nella coppia A_0, B_0.

Supponiamo che α^2 non sia sempre uguale ad 1 (escludiamo cioè le trasformazioni tra π e $\bar{\pi}$ che sono conformi nella generica coppia di punti corrispondenti), allora la differenziazione esterna delle (7) mostra che si possono ulteriormente specializzare i riferimenti sì che risulti:

$$(8) \qquad l = m = \mu = \nu = 0$$

È facile constatare che attualmente le circonferenze A_1, A_2 in π (B_1, B_2 in $\bar{\pi}$) sono osculatrici alle *curve principali* $\omega^1{}_0 = 0$, $\omega^2{}_0 = 0$ rispettivamente (e analoganente in $\bar{\pi}$). Per finire di fissare i riferimenti occorre distinguere il caso generale dal caso $\lambda = n = 0$ (che trascureremo quì). Nel caso generale si potrà far sì che una delle λ, n (che non sia nulla) diventi eguale ad 1; dopo di che il riferimento è fissato in ciascun piano e le formule (7) e quelle che se ne ottengono per differenziazione esterna forniscono un sistema completo di invarianti. Ma su ciò non ci tratterremo.

3. Esaminiamo ora la corrispondenza fra E_3 circolari di centri due punti A_0, B_0, costituenti una coppia regolare di punti corrispondenti in una trasformazione T non conforme (8) (per la quale quindi $\alpha^2 \neq 1$). La condizione:

$$(9) \qquad | A_0, dA_0, d^2A_0, d^3A_0 | = 0$$

(7) Si tratta della coppia di direzioni ortogonali uscenti da A_0 in π cui corrisponde in T una coppia di direzioni, uscenti da B_0 in $\bar{\pi}$, pure ortogonali.

(8) Lo studio di quella corrispondenza trovasi fatto localmente per il caso di trasformazioni conformi in: E. BOMPIANI, *Caratteri differenziali della trasformazione conforme*, « Rend. di Mat. e appl. », Roma, 5 (2) 140 146 (1952).

manifestamente fornisce gli E_3 circolari di centro A_0 in π. Col riferimento indicato in fine del n. *2* si ha:

$$
(10) \quad \begin{aligned}
dA_0 &= \omega^0{}_0 A_0 + \omega^1{}_0 A_1 + \omega^2{}_0 A_2 \\
d^2 A_0 &= \{ d\omega^0{}_0 + (\omega^0{}_0)^2 + \omega^1{}_0\omega^0{}_1 + \omega^2{}_0\omega^0{}_2 \} A_0 + \\
&+ \{ d\omega^1{}_0 + \omega^0{}_0\omega^1{}_0 \} A_1 + \{ d\omega^2{}_0 + \omega^0{}_0\omega^2{}_0 \} A_2 - \\
&- \{ (\omega^1{}_0)^2 + (\omega^2{}_0)^2 \} A_3 = p^0{}_0 A_0 + p^1{}_0 A_1 + p^2{}_0 A_2 + p^3{}_0 A_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d^3 A_0 &= \{ dp^0{}_0 + p^0{}_0\omega^0{}_0 + p^1{}_0\omega^0{}_1 + p^2{}_0\omega^0{}_2 \} A_0 + \\
&+ \{ dp^1{}_0 + p^0{}_0\omega^1{}_0 - p^3{}_0\omega^0{}_1 \} A_1 + \{ dp^2{}_0 + p^0{}_0\omega^2{}_0 - p^3{}_0\omega^0{}_2 \} A^2 + \\
&+ \{ dp^3{}_0 - p^1{}_0\omega^1{}_0 - p^2{}_0\omega^2{}_0 - p^3{}_0\omega^0{}_0 \} A_3 = \\
&= q^0{}_0 A_0 + q^1{}_0 A_1 + q^2{}_0 A_2 + q^3{}_0 A_3 ;
\end{aligned}
$$

la (9) diventa dunque:

$$
(10) \qquad \omega^1{}_0(p^2{}_0 q^3{}_0 - p^3{}_0 q^2{}_0) - \omega^2{}_0(p^1{}_0 q^3{}_0 - p^3{}_0 q^1{}_0) = 0
$$

Una condizione analoga fornisce gli E_3 circolari di centro B_0 in $\bar{\pi}$; eliminando fra la (10) e quest'ultima condizione la $(\omega^1{}_0 d^2\omega^2{}_0 - \omega^2{}_0 d^2\omega^1{}_0)$ si ottiene una relazione fra $\omega^1{}_0$, $\omega^2{}_0$, $d\omega^1{}_0$, $d\omega^2{}_0$ che fornisce gli E_2 di centro A_0 per i quali passa un E_3 circolare che viene mutato da T in un E_3 pure circolare. Non occorre quì scrivere quella relazione, basterà osservare che essa è di secondo grado nelle $d\omega^1{}_0$, $d\omega^2{}_0$. Possiamo concludere che, in π, dal punto A_0 escono ∞^1 E_2 del tipo sopra indicato cui corrispondono in $\bar{\pi}$ ∞^1 E_2 analoghi uscenti da B_0; i cerchi osculatori di quegli E_2 costituiscono in ciascun piano, un sistema algebrico ∞^1 [9].

La relazione di cui s'è detto è in sostanza una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine e definisce, per ciascuno dei piani π, $\bar{\pi}$, un sistema ∞^2 di curve che si corrispondono in T e che diremo le curve C della trasformazione; si tratta di curve associate in modo covariante alla T nel campo conforme. È chiaro che: *ogni circonferenza che venga mutata da* T *in circonferenza è una curva* C. Per le trasformazioni conformi si constata senza difficoltà che l'equazione differenziale delle curve C si riduce ad una equazione del primo ordine soltanto. Vi sono dunque, in quel caso, in ciascun piano, soltanto ∞^1 curve tali che ogni E_2 tangente ad una di esse contiene un E_3 circolare che vien mutato in E_3 circolare. Si può dunque dire che nel caso delle trasformazioni conformi le curve C sono ∞^1 soltanto, chiamando ancora curve C le curve predette. Da tutto ciò si trae poi che: *Se una trasformazione conforme muta ∞^2 circonferenze in circonfererenze essa si riduce necessariamente ad una affinità circolare.* Infine le curve C sono manifestamente indeterminate per le affinità circolari.

(9) Vi sono due di quegli E_2 per ogni E_1 di centro A_0 (o B_0) per quanto si è osservato prima.

4. Dimostriamo ora la seguente proposizione: *Le uniche trasformazioni puntuali fra due piani euclidei che mutino ∞^2 circonferenze in circonferenze sono quelle che si ottengono ponendo una corrispondenza omografica fra la rete delle rette di un piano ed una rete qualunque di circonferenze dell'altro e le trasformazioni loro prodotto (a meno di affinità circolari).*

Consideriamo una trasformazione T che muti ∞^2 circonferenze in circonferenze. Si riconosce facilmente anzitutto che: o le ∞^2 circonferenze in un piano costituiscono un sistema lineare oppure tutte le curve C sono circonferenze. In quest'ultimo caso quelle che passano per un punto generico costituiscono un sistema algebrico ∞^1 di indice 2. Inoltre la corrispondenza subordinata da T fra le circonferenze uscenti da due punti A_0, B_0 corrispondenti è proiettiva [10]. Supponiamo in primo luogo che il sistema $\infty^2 \Sigma$ di quelle circonferenze sia lineare in un piano π. Allora esisterà una trasformazione che muta le circonferenze di Σ nelle rette di un piano π^*. Considerando poi il prodotto di T e di quella trasformazione si conclude che anche le circonferenze trasformate di quelle di Σ costituiscono un sistema lineare, e ciò in virtu di un Lemma stabilito da B. SEGRE nella prima delle op. cit. in [2] a pag. 20. Pertanto in questo primo caso si conclude che T è prodotto di trasformazioni ciascuna delle quali muta la rete delle rette in una rete di circonferenze operando omograficamente fra le due reti.

Supponiamo ora che Σ non sia lineare in π e $\bar{\pi}$ e consideriamo una coppia regolare di punti A_0, B_0 corrispondenti in T. Per quanto s'è detto in principio, nel caso attuale, dovranno passare ∞^1 circonferenze per A_0, costituenti un sistema algebrico di indice 2, che vengono mutate da T in ∞^1 circonferenze per B_0 e la T dovrà subordinare una proiettività fra le circonferenze dei due sistemi.

Applichiamo ora al piano di A_0 una inversione di centro quel punto ed analogamente operiamo nel piano di B_0; otterremo così una trasformazione T^* (equivalente a T nel campo conforme) la quale dovrà mutare ∞^1 rette tangenti ad una conica γ in rette tangenti ad una conica $\bar{\gamma}$ e subordinare fra γ e $\bar{\gamma}$ una proiettività.

[10] Se si tiene presente l'osservazione fatta in [2] e si ricorda la corrispondenza cremoniana che intercede fra i piani osculatori alle curve corrispondenti, in una corrispondenza fra superficie, uscenti da una coppia di punti corrispondenti (cfr. E. BOMPIANI, *Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie*, «Ann. di Mat.» 4 (1) 259-284 (1924)) segue immediatamente quanto si afferma nel testo.

Si vede subito che la corrispondenza subordinata da T^* fra due rette corrispondenti deve essere proiettiva e se ne deduce che T^* è una trasformazione omografica e pertanto una similitudine. Ma allora T è una affinità circolare e muta ogni circonferenza in circonferenza. Non vi possono dunque essere trasformazioni per le quali il sistema Σ non sia lineare in ciascun piano ed il teorema è così dimostrato.