UMI

Recensioni.

* Luigi Bianchi, Opere, Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma 1952 (Fabio Conforto)
* Opere Matematiche di Paolo Ruffini, Tomo secondo, Edizioni Cremonese, 1953 (Eugenio E. Togliatti)
* D. Graffi, Teoria Matematica dell'Elettromagnetismo, Vol. I, Patron, Bologna, 1940 (Tristano Manacorda)
* B. Segre, Geometria Analitico-Descrittiva, Pàtron, Bologna, 1950 (Aldo Andreotti)
* Lèonard de Pise, Le livre des nombres carrés, Deslée de Brouwer, Bruges, 1952 (Angiolo Procissi)
* M. Frèchet, Pages choisies d'analyse générale, Gauthier-Villars, Paris, 1953 (Carlo Miranda)
* Claude Chevalley, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, American Mathematical Society, 1951 (Mario Benedicty)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 205–216.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_205_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

RECENSIONI

Luigi Bianchi, *Opere*, Vol. I, p. I, a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Edizioni Cremonese, Roma, 1952, pp. 615. (L. 5.000)

Con questo volume si inizia la pubblicazione delle opere matematiche di Luigi Bianchi, deliberata dalla Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana sin dal 1938 e ritardata sino ad oggi per le difficoltà della guerra e del dopoguerra. Come è noto, perchè più volte comunicato su questo stesso Bollettino, l'odierna pubblicazione si inquadra in un vasto piano editoriale dell'U.M.I., già degnamente entrato nella fase delle concrete realizzazioni con i due volumi delle opere matematiche di Felice Casorati, volto a dare un assetto dignitoso e definitivo alle opere dei nostri matematici maggiori, che svolsero la loro attività nella seconda metà del secolo XIX o a cavallo tra l'ottocento ed il novecento. Insieme alle edizioni nazionali già esistenti delle opere di Eugenio Beltrami, Enrico Betti, Francesco Brioschi e Luigi Cremona, l'iniziativa dell'U.M.I., che per taluni dei nostri sommi affiancherà qualche altra iniziativa, varrà a dotare la letteratura matematica di un corpus completo delle opere dei matematici italiani più significativi dell'epoca predetta, ciò che, se non mancherà sicuramente di promuovere la conoscenza dell'essenziale contributo di idee e di risultati a questi dovuto, è da augurarsi possa anche aumentare il prestigio ed il riconoscimento dell'Italia nel campo scientifico ed in quello, più largo, degli apporti alla cultura ed alla vera civiltà.

Il volume in esame, che si apre con l'immagine del Maestro, s'inizia con una « Prefazione alle opere matematiche di Luigi Bianchi », a firma di E. Bompiani e G. Sansone, dalla quale si apprende tra l'altro che devesi al compianto Enea Bortolotti la faticosa compilazione dell'elenco delle memorie e dei volumi di L. Bianchi, la raccolta della maggior parte degli estratti delle memorie ed il progetto della divisione delle Opere di Luigi Bianchi in 10 volumi. Secondo il piano di E. Bortolotti, il primo volume doveva contenere le memorie di Aritmetica, di Algebra e di Analisi, i rimanenti volumi tutti i lavori di Geometria. Successive esigenze pratiche hanno imposto di spezzare già il primo volume in due parti. È così che il volume ora uscito risponde alla parte prima del volume primo, e contiene i soli lavori di Aritmetica e di Algebra. La parte seconda del volume primo uscirà tra non molto e sarà dedicata al contributo di Luigi Bianchi all'Analisi, prevalentemente nel campo dei gruppi continui finiti di trasformazioni e nella teoria delle equazioni a derivate parziali.

L'elenco delle pubblicazioni di Luigi Bianchi, redatto come si è detto da E. Bortolotti, è integralmente riprodotto nel volume in esame subito dopo la Prefazione. I lavori sono riportati in ordine cronologico, il loro numero ammonta a ben 208 ed anzi a 209 se si aggiunge un manoscritto senza data sulle metriche di Minkowski e il teorema sui volumi dei corpi centrati convessi (non concavi). Già la loro pura e semplice elencazione, che prende 13 pagine del testo, è un'impressionante testimonianza della continuità e dell'intensità di lavoro di Luigi Bianchi in oltre mezzo secolo di attività scientifica!

Segue l'elenco delle commemorazioni di Luigi Bianchi. Due di queste sono integralmente riprodotte. La prima è la commemorazione in memoria di Luigi Bianchi, tenuta da Gaetano Scorza il 18 aprile 1930 alla Scuola Normale Superiore di Pisa: orazione calda di umanità, traboccante della commossa devozione del discepolo verso il Maestro, dalla quale balza limpida la paterna figura di Luigi Bianchi, inquadrata in quell'ambiente pisano dell'Università e soprattutto della Scuola Normale che per lunghi anni si è quasi identificato con Lui. La seconda è stata pubblicata da Guido Fubini negli Annali di Matematica del 1929 e contiene un esame completo e minuto, svolto con competenza da maestro dell'opera geometrica del Bianchi, mentre le ricerche di questi di carattere algebrico ed aritmetico vengono brevemente sintetizzate in una appendice allo scritto del Fubini, dovuta ad A. M. Bedarida.

Ma è ormai tempo di passare ad un esame più circostanziato della parte più propriamente scientifica del volume che ci sta dinnanzi. La materia è stata divisa in due parti, la prima delle quali comprende i lavori, in numero di 8 (compreso l'anzidetto manoscritto sulle metriche di Minkowski) riguardanti la teoria dei gruppi discontinui finiti e delle equazioni algebriche e la teoria dei numeri; la seconda di 14 lavori le ricerche sui gruppi discontinui infiniti e sulle forme aritmetiche. Un opportuno e sobrio commento, redatto per il primo gruppo di lavori da G. Ricci e per il secondo da G. Sansone, precede i lavori di ciascun gruppo; in tale commento il lettore potrà trovare una veduta sintetica sul contributo di Bianchi al tipo di problemi in questione, nonché le indicazioni sugli sviluppi che le ricerche del Bianchi hanno ricevuto dopo di Lui, sul posto che i risultati del Bianchi hanno trovato nella letteratura matematica, sulle questioni rimaste aperte.

Non è qui possibile scendere all'esame minuto di ciascun lavoro, ma un giudizio sintetico d'insieme deve pur essere tentato.

La prima impressione che si prova davanti a questo volume è di sorpresa. È naturalmente a tutti ben noto che il « geometra » Luigi Bianchi si è anche occupato durante la sua infaticabile attività di algebra, di teoria dei gruppi, di teoria dei numeri, lo testimoniano se non altro i diversi poderosi trattati da Lui dedicati a tali teorie, sui quali tutti quanti abbiano voluto, almeno in Italia, avvicinarsi a questi rami tra i più belli ed i più elevati delle matematiche non hanno certo mancato di meditare. Ma, nonostante ciò la constatazione che il contributo originale a siffatte teorie di Luigi Bianchi — vale a dire di un uomo, la cui fama, secondo una veduta unanime, è fondata sulla sua opera nella Geometria differenziale — si concreta materialmente in un volume di oltre 600 pagine che da solo potrebbe rappresentare degnamente le opere complete di un matematico di valore, non può non destare un moto di sorpresa. Questo volume è la migliore dimostrazione, per dirla con Gaetano Scorza, che « all'algebra superiore ed all'alta aritme tica Egli non guardò con occhi disattenti o di semplice curioso, bensì di conoscitore avveduto e di collaboratore efficace ».

Scendiamo ora a qualche particolare del volume. Tra i lavori del primo gruppo spicca la memoria giovanile del 1883 *Sulla risolvente di Lagrange per le equazioni di grado primo risolvibili per radicali,* che si riattacca in modo evidente alla scuola di Enrico Betti. Gli altri lavori, ad eccezione di una breve nota di teoria elementare dei numeri, s'inquadrano nel periodo dal 1920 al 1923, quando il Bianchi preparava le sue *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici,* nella quale detti lavori si ritrovano tutti con sviluppi anche più ampî.

Per la valutazione delle ricerche sui gruppi discontinui infiniti e sulle forme aritmetiche, giova tener presenti talune significative circostanze di tempo. Luigi Bianchi nacque nel 1856 ed è così contemporaneo di H. Poincaré (1854-1912) e di E. Picard (1856-1941). Al decennio tra il 1880 ed il 1890 risalgono le memorabili ricerche di Poincaré sui gruppi discontinui di sostituzioni lineari, sulle funzioni automorfe e sull'uniformizzazione, cui si affiancano importanti ricerche di Picard su argomenti strettamente collegati. Le ricerche di Poincaré e di Picard, soprattutto quelle del primo, s'inquadrarono subito perfettamente in quelle già da tempo in corso in Germania, dove le indagini sulla teoria dei numeri nella tradizione di Gauss, Dirichlet, Dedekind, Kronecker, ecc. e quelle sulla teoria delle funzioni, originate dai lavori di Riemann, Weierstrass, Schwarz, ecc., avevano portato ad un esteso sviluppo della teoria delle funzioni ellittiche modulari e ad una naturale tendenza, dovuta essenzialmente all'opera animatrice di F. Klein (1849-1925), ad ampliare quest'ultima in una più generale teoria delle funzioni automorfe. Si tenga ora presente che nel biennio 1880-81 il Bianchi ebbe modo di avvicinare durante un suo soggiorno all'estero presso le università di Monaco e di Gottinga l'affascinante personalità di Klein, ricevendo così la migliore preparazione per penetrare in tutto quell'ordine di idee che si riferisce alle ricerche anzidette e che doveva così rigogliosamente e tumultuosamente svilupparsi nel decennio tra il 1880 ed il 1890; e si avrà la migliore spiegazione per così dire psicologica del gruppo di ricerche del Bianchi sui gruppi discontinui e le forme aritmetiche, che del resto è entrato in blocco nella letteratura matematica mercè la motivata citazione che di esso hanno fatto il Klein ed il Fricke nelle loro *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen* (1897; 1912). Salvo due lavori del 1909 e del 1912, il gruppo di ricerche del Bianchi cade infatti tutto negli anni tra il 1889 ed il 1895, riattaccandosi così strettamente all'opera di Poincaré, di Picard e di Klein.

Anche se il Bianchi si è occupato esclusivamente dell'aspetto gruppale ed aritmetico delle questioni trattate, trascurando completamente il frutto che i suoi risultati avrebbero potuto certo portare in rapporto alla teoria delle funzioni automorfe, non perciò l'opera del Bianchi in questo campo è da sottovalutare. Si tratta di più memorie magistralmente condotte e dominate da feconde vedute sintetiche, ove spesso risalta la schietta mentalità geometrica del loro autore. Rimandiamo al già indicato commento di G. Sansone per la formulazione di alcuni ben precisi e determinati problemi di natura certo molto riposta, che i lavori del Bianchi hanno lasciato aperti. Qui vogliamo soltanto terminare con l'osservazione di carattere del tutto generale che ancora oggidì, dopo tanto fervore di ricerche, resta non pienamente chiarito il rapporto tra forma del campo fondamentale da una parte e natura aritmetica dei coefficienti delle sostituzioni del corrispondente gruppo discontinuo dall'altra; e con l'augurio che specialmente oggi che si va sviluppando una teoria delle funzioni abeliane modulari (che generalizza quella delle funzioni ellittiche modulari), certamente destinata ad essere feconda di conseguenze per vaste classi di funzioni automorfe di più variabili, si tenga conto nelle nuove ricerche anche di questo gruppo di lavori del nostro Bianchi, che sono ben meritevoli di attenta considerazione e di meditata lettura. Sarebbe certo questo il miglior successo per il volume, che ora vede la luce.

FABIO CONFORTO

Opere Matematiche di Paolo Ruffini: Pubblicate sotto gli auspici dell' Unione Matematica Italiana a cura del Prof. Dott. ETTORE BORTOLOTTI, con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. - Tomo secondo. - Roma, Edizioni Cremonese, 1953; pp. XIV + 510; L. 5.000.

E' stato pubblicato, coi tipi della Casa Editrice Perrella di Roma, il secondo volume delle *Opere di Paolo Ruffini.* Il primo volume era stato pubblicato fin dal 1915 sotto gli auspici del Circolo matematico di Palermo, e grazie specialmente all'entusiasmo generoso di G. B. GUCCIA. Questo secondo volume, curato esso pure da ETTORE BORTOLOTTI, era pronto da tempo; ma l'edizione che ne era stata fatta a Palermo andò distrutta nella guerra del 1940-45 durante un bombardamento aereo di quella città; il volume che ora vede la luce è una riproduzione anastatica di quello distrutto, fatta fare dall'Unione Matematica Italiana, con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. L'opera rientra così nel quadro della pubblicazione delle opere dei grandi matematici italiani, che l'Unione Matematica Italiana ha intrapreso dopo la fine dell'ultima guerra, con un programma vasto e promettente, che condurrà senza dubbio ad una realizzazione degna delle altissime tradizioni della matematica italiana.

Il primo volume delle Opere di PAOLO RUFFINI, che il pubblico matematico già conosce, conteneva anzitutto l'opera fondamentale del 1799 intitolata « *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto* »; seguita prima da un'appendice dedicata a « *Rischiarimenti e risposte alle obbiezioni* », e poi dalla Memoria del 1802 intitolata « *Della soluzione delle equazioni algebraiche particolari di grado superiore al quarto* ».

Questo secondo volume s'inizia con la Memoria del 1803, dove si parla « *Della irresolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto* »; pubblicata nella parte seconda del volume decimo delle Memorie della Società italiana delle Scienze. Essa ebbe origine, com'è noto, da una lettera in data 30 settembre 1802, pubblicata nella stessa raccolta, e scritta da PIETRO ABBATI MARESCOTTI, scolaro ed amico di PAOLO RUFFINI, nella quale l'A. chiariva e generalizzava alcune teorie del Maestro. La lettera anzidetta è pubblicata in fondo al presente volume, come appendice. Le indicazioni in essa contenute, ed in particolare il teorema che noi ora esprimiamo in linguaggio moderno dicendo che non esistono funzioni razionali di più di quattro variabili le quali assumano meno di cinque e più di due valori diversi per effetto delle permutazioni sulle variabili stesse, condussero il RUFFINI, nella Memoria di cui qui si parla, ad una nuova e più semplice dimostrazione del suo celebre teorema.

La pubblicazione della Memoria precedente provocava nel 1804 una enunciazione di vari dubbi da parte del Prof. G. F. MALFATTI dell'Università di Ferrara; a questi dubbi, e ad altri che Egli stesso aveva formulato, rispondeva il RUFFINI con la Memoria comparsa nel 1805 nelle Memorie della Società italiana delle Scienze ed intitolata appunto « *Risposta di* P. RUFFINI *ai dubbi propostigli dal Socio* G. F. MALFATTI *sopra la insolubilità algebraica delle equazioni di grado superiore al quarto* »; essa costituisce il secondo numero del presente volume.

Seguono le « *Riflessioni di* P. RUFFINI *intorno al metodo proposto dal Signor* F. MALFATTI *per la soluzione delle equazioni del quinto grado* »; lavoro che risale al 1805, e che contiene la dimostrazione del fatto che la cosidetta risolvente di MALFATTI dell'equazione generale del 5º grado deve avere il grado 6, e che l'equazione generale del 5º grado è risolubile per radicali qualora la detta risolvente possegga una radice razionale.

Le due Memorie che seguono, entrambe del 1806, e cioè « *Alcune proprietà generali delle funzioni* », « *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al 4º, qualunque metodo si adoperi, algebraico esso siasi, o trascendentale* », affermano, come i titoli stessi dicono, l'impossibilità di risolvere le equazioni algebriche generali di grado superiore al quarto anche ricorrendo a funzioni trascendenti dei coefficienti dell'equazione; in realtà, le trascendenti a cui il RUFFINI pensava erano soltanto una categoria assai limitata di funzioni trascendenti, che Egli ha chiamato « esatte »; il fatto di non averne chiarito abbastanza la natura ha gettato, come è noto, un certo discredito su questi due lavori, e per riflesso un poco anche su tutti gli altri.

Assai importante è la Memoria che segue, contenente « *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali* », pubblicata a Modena nel 1813. Essa contiene l'ultima, e di tutte la più semplice, delle varie dimostrazioni date dal RUFFINI del suo classico teorema; dopo avere insegnato a costruire la più generale espressione deducibile dai coefficienti di una data equazione con operazioni razionali ed estrazioni di radici di grado qualunque, il RUFFINI dimostra che, per una equazione generale di grado superiore al quarto, una tale espressione deve conservare immutato il suo valore qualora si effettuino su cinque radici due cicli del terz'ordine aventi un elemento comune; il che porta a concludere l'invariabilità dell'espressione stessa per effetto di cicli del quint'ordine; onde l'irrisolubilità per radicali. Come è ben noto, una dimostrazione basata su quest'ordine d'idee va sotto il nome di modificazione di Wantzel alla dimostrazione di ABEL.

Le Memorie che seguono, e che completano il volume, dànno un quadro complessivo della produzione matematica di P. RUFFINI; esse sono le seguenti: « *Intorno al metodo generale proposto dal Signor* HOËNÉ WRONSKI *onde risolvere le equazioni di tutti i gradi* »; « *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado* »; « *Di un nuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche* »; « *Alcune proprietà delle radici dell'unità* ».

Il terzo ed ultimo volume delle opere di P. RUFFINI, attualmente in corso di stampa, conterrà il carteggio matematico del RUFFINI con gli scienziati del suo tempo, e metterà certamente in luce ancora più viva la posizione preminente del RUFFINI stesso tra i grandi matematici di quel tempo. I due volumi sinora pubblicati mostrano già assai bene la vastità della sua coltura e la profondità geniale del suo pensiero. Per giungere alla dimostrazione dell'impossibilità d'una risoluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto, i metodi analitici di quel tempo, anche dopo le classiche ricerche di Lagrange, non sarebbero stati sufficienti; il RUFFINI ha dovuto quindi allontanarsene sensibilmente, dilungandosi anche assai spesso in esemplificazioni che per noi riescono prolisse; i suoi metodi, con la loro novità, possono effettivamente essere riusciti difficili ai suoi contemporanei, molti dei quali non giunsero ad una esatta comprensione del pensiero che, con profondo senso critico e con sicura intuizione, lo aveva guidato alla visione di fatti molto generali. In realtà, attraverso le varie dimostrazioni da lui escogitate per un celebre teorema, attraverso le lunghe discussioni che vogliono rispondere alle obbiezioni sue e degli scienziati suoi contemporanei, e nonostante qualche nebulosità qua e là rimasta in talune sue affermazioni, l'opera di P. RUFFINI ha gettato le basi e contiene i primi germi della teoria delle sostituzioni e dei gruppi d'ordine finito, che tanta parte ha poi avuto nel progredire dell'algebra. La riduzione nel linguaggio moderno della teoria dei gruppi dei ragionamenti e dei risultati del RUFFINI è quanto mai interessante e lascia attoniti per la ricchezza e la qualità dei risultati; tale riduzione è contenuta nelle Note esplicative che ETTORE BORTOLOTTI, con acume e con accuratezza, ha aggiunto in fondo al volume. Con questa pubblicazione, che ci auguriamo di vedere presto completa, viene degnamente onorata la memoria di un Grande, il nome del quale è legato in modo ormai indissolubile a metodi e risultati classici, e l'opera del quale contiene i primi sviluppi delle teorie più belle e feconde dell'algebra moderna.

EUGENIO G. TOGLIATTI

D. GRAFFI: *Teoria Matematica dell'Elettromagnetismo*, Vol. I, (Casa editrice R. Patron, Bologna, 1949, pp. 331)

E' questa soltanto la prima parte, dedicata ai campi elettromagnetici stazionari, di un'opera più vasta. Il modo con cui è qui presentata e trattata la materia, induce ad esprimere il vivissimo augurio che possano presto apparire a completamento dell'opera, uno o più altri volumi. Nella trattazione del prof. Graffi si associa infatti, al rigore matematico, anche un senso fisico ed immediato dei fenomeni fondamentali che non può non rendere accessibile e gradevole la materia ad ogni lettore.

Dopo una prima parte, destinata a complementi di calcolo vettoriale, ai teoremi di Green, ai problemi di Dirichlet e di Neumann, si espone la teoria matematica dei potenziali newtoniani. Sono esaminate e trattate a fondo col consueto rigore, le principali proprietà dei potenziali di volume, di semplice e di doppio strato. La III parte è dedicata alla teoria del campo elettromagnetico stazionario. Vi vengono però anche stabilite alcune relazioni e teoremi validi anche nei campi elettromagnetici più generali. L'uso di unità razionalizzate rende le formule particolarmente semplici ed espressive.

Il I Capitolo è dedicato al campo elettrostatico. Si dà particolare cura al concetto di capacità e si determinano diversi campi elettrostatici di particolare importanza. Il Capitolo II si occupa della teoria dei dielettrici. Viene introdotto lo spostamento elettrico, si tratta della polarizzazione del mezzo, infine dell'energia del campo elettrostatico e delle correnti elettriche stazionarie. Nei Cap. III e IV, dopo aver stabilito l'equazione di continuità in forma generale, e la legge di Joule, si passa allo studio più particolareggiato delle correnti elettriche e del campo magnetico stazionario, stabilendo i concetti di resistenza elettrica, di campo impresso, di coefficiente di induzione mutua e di autoinduzione ecc. Vengono anche stabilite le equazioni di Maxwell, in forma però generale, sia circuitale che differenziale; la seconda anche nella forma valida per i mezzi in movimento.

Si tratta, insomma, di una eccellente trattazione del campo elettromagnetico, prevalentemente dal punto di vista matematico, ma che dà anche deciso rilievo ai fatti sperimentali che giustificano le ipotesi addotte E' un vero peccato che la trattazione sia per ora limitata ai campi stazionari, e dobbiamo proprio ripetere l'augurio che l'opera possa essere presto completata.

TRISTANO MANACORDA

B. SEGRE, *Geometria Analitico-Descrittiva*, Editrice Pàtron, Bologna, 1950, pp. 487, (Litografie).

La sentita esigenza di evitare un brusco salto fra l'insegnamento geometrico del primo e quelli del terzo e quarto corso per la laurea in Matematica e affini, ha ispirato l'Autore a raccogliere in un organico volume quegli argomenti la cui conoscenza preliminare è indispensabile ad ogni serio insegnamento di Geometria. Invero, come l'Autore stesso osserva nella prefazione, il voler limitare l'insegnamento del secondo anno alla sola Geometria Descrittiva significherebbe rinunziare, quasi completamente, allo spirito sintetico della Geometria Proiettiva e del metodo analitico cui il corso del primo anno è ispirato; d'altra parte le scarse nozioni di Algebra e di Analisi note agli studenti non consentono di affrontare subito argomenti elevati In questo volume i metodi di rappresentazione vengono condensati in un centinaio di pagine; precisamente nella parte seconda e nell'ultimo capitolo del volume ove sono esposti i metodi delle proiezioni centrali, ortogonali e quotate e le loro applicazioni alla rappresentazione delle curve e superficie. La prima parte è dedicata ad un ampio svolgimento della Geometria Proiettiva delle forme di seconda specie, con rapidi ed efficaci richiami alla Geometria delle forme di prima specie; un intero capitolo tratta delle schiere rigate e delle quadriche. Una terza parte, dal titolo « Introduzione alla teoria delle curve e superficie », la più interessante per numero e qualità di argomenti, contiene una lucida esposizione delle proprietà fondamentali delle curve algebriche piane, delle curve sghembe algebriche e delle superficie algebriche, premesse necessarie soprattutto ai corsi di Geometria Algebrica degli anni successivi. Una cinquantina di pagine sono dedicate ad argomenti di Geometria Differenziale. Ovunque risalta l'eleganza, lo spirito critico e la semplicità didattica dell'esposizione. Ogni capitolo è degnamente corredato da numerosi esercizi e complementi scelti con acume dal Dott. Muracchini, che ha curato lodevolmente la redazione dell'intero volume. Ampie sono le informazioni bibliografiche. Il libro si presenta in degnissima veste tipografica.

ALDO ANDREOTTI

LÈONARD DE PISE: *Le livre des nombres carrés*, Traduit pour la prémiére fois du latin médiéval en Français par PAUL VER EECKE, Bruges, Deslée de Brouwer, 1952, pp. XXV + 75; prezzo 200 fr. belgi.

Paul Ver Eecke ci ha dato, da trent'anni a questa parte, con una perseveranza e tenacia ammirevoli, delle buone traduzioni francesi, annotate, di quasi tutti i classici greci della matematica: Archimede (1921), Apollonio (1924), Diofanto (1926), Teodosio di Tripoli (1927), Sereno (1929), Pappo (1933), L'Ottica e la Catottrica di Euclide (1938), Didimo, Diofane, Antemio, e il Frammento matematico di Bobbio (1940), Proclo (1948), e di alcuni è stato parlato su questo Bollettino [Diofanto, (1) 5, pp. 99-100; Sereno (1) 10, pp. 96-97; Pappo (1), 12, pp. 331-335; Didimo, ecc., (2), 3, pp. 259-262]

Con l'opera che qui presentiamo il Ver Eecke abbandona l'antichità classica, e ci fornisce una edizione moderna di un breve ma importante testo medioevale. E' doppiamente cara a noi Italiani questa fatica dell'eminente studioso belga; anzitutto Leonardo Fibonacci, o Leonardo Pisano, come più spesso si chiama, è il progenitore dei matematici italiani. Si deve a lui, come è noto, la introduzione dell'Algebra in occidente, ed il « *Liber Abbaci* », prima opera di algebra pubblicata in Europa, che per almeno tre secoli fu il testo classico su tale materia. In secondo luogo, il Ver Eecke avverte, nella Prefazione al volume, che l'incentivo a dar veste moderna al « *Liber Quadratorum* » di Leonardo gli fu ispirato dal nostro indimenticabile Ettore Bortolotti, ricordato dallo studioso belga con commosse parole.

Apre il volume una lunga introduzione dove la personalità e l'opera del matematico pisano sono esaminate e messe in evidenza con abbondanza di particolari e di citazioni. Da notare la giusta luce, in cui vengono messi gli studi di B. Boncompagni, A. Genocchi, Ettore Bortolotti, A. Agostini.

Il « *Liber Quadratorum* » ebbe origine da una disputa scientifica: Giovanni di Palermo, matematico della Corte di Federico II di Sicilia, sfidò Leonardo — nel tempo che Federico con la Corte si trovava in Pisa — a risolvere il problema di determinare un numero quadrato, che aumentato o diminuito di 5 facesse ancora un numero quadrato. Questo è il problema centrale dell'opera di Leonardo, risoluto dall'autore alla prop. XIV, col numero quadrato 1681/144 che aggiunto a 5 dà il numero quadrato 2401/144 e diminuito di 5 dà il numero quadrato 961/144. Questa questione dà occasione a Leonardo di trattare numerose proprietà dei numeri quadrati, e di risolvere vari problemi di analisi indeterminata. Nel 1930, Ettore Bortolotti scriveva (1): « Il "*Liber Quadratorum*" *è l'opera in cui Leonardo maggiormente dimostra la sua originalità di scienziato e la sua potenza creatrice, quella per cui egli fu giudicato come il maggior genio che, nella Teoria dei Numeri, la storia della matematica abbia registrato nei* 13 *secoli che passarono da Diofanto a Fermat* ». Quest'opera rivela dunque Leonardo come un vero continuatore di Diofanto, ma, come aveva già avvertito Ettore Bortolotti, è per ora quasi

(1) ETTORE BORTOLOTTI, « *Le fonti arabe di Leonardo Pisano* », Mem. Acc. Sc. Ist., Bologna, Sc. Fis. Mat., (8) 7 (1929-1930), p. 92.

impossibile sapere attraverso quali opere Leonardo abbia potuto venire a conoscenza dei problemi studiati da Diofanto.

Interessante il breve esame che il traduttore fa dell'opera algebrica di Leonardo, al quale riconosce il merito di avere introdotto, già molto prima di Vieta, un simbolismo matematico.

La traduzione, sempre fedele al testo, è accompagnata da sobrie note, dirette a chiarire, con simbolismo moderno, i ragionamenti di Leonardo.

Concludendo, dobbiamo esser grati a Paul Ver Eecke di averci presentato, in ottima veste moderna una delle opere più originali del più antico matematico italiano.

ANGIOLO PROCISSI

M. FRÈCHET: *Pages choisies d'analyse générale*, Collection de logique mathématique (Monographies réunies par M.me Destouches-Février) Gauthier-Villars Paris e E. Nauwelaerts Louvain 1953, pagg. 213.

Ben nota è a tutti i cultori di analisi generale l'importanza fondamentale per lo sviluppo di questa teoria dei lavori di Maurice Fréchet. E' infatti nell'indirizzo di questo Autore che l'analisi funzionale, nata in Italia ad opera di Vito Volterra come teoria delle funzioni di linea e di Salvatore Pincherle come teoria delle trasformazioni funzionali, si è evoluta fino a divenire ai giorni nostri una teoria generale delle corrispondenze fra insiemi di punti di due spazi astratti. Bisogna dunque essere grati al Fréchet di aver raccolto in questo volumetto alcuni dei suoi lavori più significativi per la storia di questo nuovo capitolo dell'analisi.

La materia è divisa in cinque capitoli, a seconda degli argomenti.

Il Cap. I riproduce una comunicazione al Congresso Internazionale di Bologna del 1928, in cui l'A. delinea una veduta d'insieme delle questioni che si pongono nella teoria degli spazi astratti e nell'analisi generale

Nel Cap. II (Les espaces fonctionelles) sono raccolte 13 note o memorie relative al problema della metrizzazione degli spazi funzionali; tra queste i classici lavori dell'A. sulla nozione di distanza di due curve o superficie.

Nel Cap. III (Analyse fonctionelle) sono riuniti 13 lavori relativi allo studio delle funzioni numeriche di un punto di uno spazio funzionale; tra questi sono da ricordare in special modo quelli sulla forma generale dei funzionali bilineari e sull'approssimazione dei funzionali continui mediante polinomiali e la classica memoria sulla nozione di funzionale differenziabile.

Nel Cap. IV (Les espaces abstraits) figurano solo tre note posteriori alla pubblicazione del ben noto trattato dell'A. su questo argomento.

Il Cap. V (Analyse générale) contiene infine sei note relative a varie questioni concernenti le funzioni di punto di uno spazio astratto, aventi eventualmente il codominio in un altro spazio astratto.

Alcune delle note e memorie riprodotte in questo volume sono corredate da qualche cenno bibliografico, per altro un po' troppo succinti, relativo a lavori di altri AA. pubblicati posteriormente a quelli del Fréchet.

CARLO MIRANDA

Claude Chevalley, *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable,* American Mathematical Society, Mathematicals Surveys, number VI, 1951, pagg. XII-188, Doll. 4.

Il volume è una trattazione della geometria sopra una curva algebrica con i metodi dell'algebra astratta e con riferimento ad un campo base qualsiasi; solo in due capitoli, allo scopo di definire il concetto di differenziale di seconda specie, si fa l'ipotesi che la caratteristica sia zero; e solo nell'ultimo capitolo, per costruire la superficie di Riemann della curva, si parte dal campo complesso.

Il punto di partenza, anzichè la curva algebrica immersa in uno spazio lineare, è il corpo delle funzioni algebriche di una variabile da essa determinato; e si ricordi che un isomorfismo operato su questo equivale ad una trasformazione birazionale operata su quella, quindi lo studio di tale corpo a meno di isomorfismi è l'aspetto algebrico della geometria sopra la curva. La trattazione, come l'A. dichiara nell'introduzione, è di tipo rigorosamente algebrico; è evitato ogni accenno a concetti geometrici, anche nelle definizioni e negli enunciati più espressivi. Ora, se ciò può soddisfare, forse, a certe esigenze di purezza, provoca però un appesantimento dell'esposizione e cela al lettore poco pratico dei metodi dell'algebra astratta la sostanziale eleganza dell'argomento; e ci sembra impossibile che l'A. non si sia fatto guidare dall'intuizione geometrica, così come ci sembra difficile che un lettore possa seguire e capire la trattazione senza far ricorso alla medesima intuizione.

Nella breve introduzione, dopo aver dato un rapido cenno storico sullo sviluppo della teoria sia dal punto di vista algebrico che da quello geometrico, l'A. dichiara di voler trattare solo la parte fondamentale della teoria; egli spiega le ragioni che l'hanno indotto a non fare ipotesi restrittive sul campo base e a considerare i fenomeni che avvengono quando si ampli il campo base ovvero il campo delle funzioni.

Gli argomenti trattati sono in parte classici e in parte originali (cfr. l'Introduzione del volume); in ogni caso però la materia è rielaborata dall'A. L'esposizione è chiara e limpidamente ordinata; le ipotesi di ciascun paragrafo sono accuratamente ripetute o richiamate in ogni enunciato. Tutte le volte che un concetto, abituale nel campo complesso, è esteso ad un campo qualsiasi, la generalizzazione è preceduta da considerazioni intese a presentare il concetto usuale da quel punto di vista che fa apparire in piena luce lo spirito della generalizzazione. Accurate le notazioni, che evitano per quanto possibile le complicazioni alle quali necessariamente porta la materia. Ottima la stampa, scarsi e inessenziali gli errori; facciamo notare che a pag. 50 si richiama due volte il Lemma 1 anzichè il Lemma 2.

All'inizio del volume trovasi un elenco delle notazioni più frequenti, alla fine un breve indice analitico.

I titoli dei capitoli sono i seguenti: I. *Posti e divisori*; II. *Il teorema di* Riemann-Roch; III. *Il completamento* $\mathfrak{p}$-adico; IV. *Estensioni di campi di funzioni algebriche di una variabile*; V. *Estensione del campo delle costanti*; VI. *Differenziali esatti*; VII. *La superficie di* Riemann.

I principali argomenti trattati sono i seguenti. L'oggetto dello studio è un *campo R di funzioni algebriche di una variabile sopra un campo K*; fissato comunque K, R è un suo sopracampo tale che: a) esista un x di R, trascendente su K; b) R sia algebrico di grado finito su $K(x)$. Gli elementi di R

algebrici su K si dicono le *costanti* di R, e formano un campo contenente K.

In R si definisce il concetto di *posto* $\mathbf{p}$ — concetto analogo del punto nel caso classico — come l'ideale delle non-unità di un particolare tipo di sottoanello di R; ad ogni posto si associa un intero positivo $d(\mathbf{p})$, il *grado*, e una funzione $\nu(x)$, l'*ordine*, definita per x in R, la quale assume valori interi oppure il « valore » ∞. Definito poi un *divisore* $\mathbf{a} = \Pi_p \mathbf{p}^{e(p)}$ come una funzione $e(\mathbf{p})$, a valore intero, definita per tutti i posti di R e quasi ovunque nulla, cioè diversa da zero solo per un numero finito di posti — l'analogo del gruppo di punti —, si definisce opportunamente un *grado* $d(\mathbf{a})$ e una *dimensione* $l(\mathbf{a})$ del divisore, nonchè una relazione di equivalenza tra divisori, la quale permette di costruire le *classi di divisori* — concetti analoghi di ordine, dimensione e serie lineare completa —. La definizione di *genere* g e l'enunciato del teorema di RIEMANN-ROCH sono i seguenti: $-g+1 = \min[l(\mathbf{a}) + d(\mathbf{a})]$, essendo il minimo rispetto a tutti i divisori $\mathbf{a}$ di R; $l(\mathbf{a}^{-1}) = d(\mathbf{a}) - g + 1 + l(\mathbf{a}'^{-1})$, ove per ogni $\mathbf{a}$ si indica con $\mathbf{a}'$ il divisore tale che $\mathbf{aa}'$ sia contenuto nella *classe canonica*, di cui si prova preliminarmente l'esistenza.

Estesa al caso di K qualsiasi la definizione di *differenziale*, si definisce il *residuo* di un differenziale e, nel caso che K abbia caratteristica zero, il concetto di differenziale di seconda specie, come quello che ha residui tutti nulli.

Nei capitoli IV e V si studiano i fenomeni che avvengono quando si ampli il campo R, ovvero il campo delle costanti e precisamente come si alterano i posti e gli enti ad essi associati, e come si muta il genere. E' in quest'ordine di idee che si definiscono i campi *iperellittici*, e si prova che sono quei campi di genere $g > 1$ che contengono un sottocampo S, di genere zero, di funzioni algebriche, tale che in S si trovino le costanti di R e che $[R:S] = 2$.

Nel capitolo VI si definisce un'operazione di *derivazione* e si studiano più a fondo le proprietà dei differenziali, limitatamente al caso di caratteristica zero per quelli di seconda specie. E' in questo capitolo l'enunciato algebrico, ormai classico, del teorema di LÜROTH.

Nell'ultimo capitolo, sotto l'ipotesi che K sia il *campo complesso* C, si introduce il concetto di superficie di RIEMANN di un campo R di funzioni algebriche di una variabile su C; essa è l'insieme S di tutti i posti di R, nel quale insieme è definita una topologia in maniera che essa sia la più debole tra quelle per le quali certe applicazioni, definite a priori, di S sopra il pianosfera, risultino continue. In questa topologia l'A. studia le funzioni meromorfe, i differenziali e i loro integrali, i caratteri topologici, le proprietà della S intesa come varietà analitica. Risultati particolari di questo capitolo sono, ad es.: la costruzione di un sistema di retrosezioni e la dimostrazione delle uguaglianze e delle disuguaglianze riemanniane.

MARIO BENEDICTY

NOTIZIE

Riunione dell'Ufficio di Presidenza e della Commissione Scientifica dell'U.M.I. — L'11 aprile 1953, in una sala dell'Istituto Matematico dell'Università di Bologna, si sono riuniti l'Ufficio di Presidenza e la Commissione Scientifica dell'U.M.I..

Sono presenti i proff.: Ascoli, Bompiani, Calapso, Chisini, Cimmino, Finzi, Graffi, Ricci, Sansone, Terracini, Togliatti, Tonolo, Villa. Hanno scusata la loro assenza tutti gli altri membri della Commissione Scientifica.

Hanno partecipato alla riunione i proff.: Cherubino, Grioli, Morin, Pignedoli e Scorza-Dragoni appositamente invitati dalla Presidenza.

Il prof. Sansone, nel rivolgere parole di saluto e di ringraziamento agli intervenuti, sottolinea la perfetta armonia con cui svolgono il loro compito tutti i membri della Presidenza.

Ricorda poi con compiacimento e gratitudine i contributi finanziari pervenuti all'U.M.I. da parte di vari enti.

L'avvenimento più importante, come ha rilevato il prof. Sansone, è l'accoglimento da parte del Consiglio Nazionale delle Ricerche di alcune proposte dell'U.M.I. È stata costituita una Commissione per la Matematica presso il C.N.R., composta dai proff.: Bompiani, Miranda, Picone, Sansone, Signorini e Terracini (Presidente Signorini, Segretario Miranda). Questa Commissione ha proposto al C.N.R. lo stanziamento di 10 milioni per provvedere alle necessità della Matematica Italiana per il 1952-53. La Commissione ha proposto di assegnare su questo fondo: 1.200.000 lire per il « Bollettino » UM.I. per sostenerne il crescente sviluppo; 2.500.000 lire alla stampa periodica italiana; 2.800.000 lire ai Gruppi Matematici 700.000 lire per ogni Gruppo, per la ripresa della loro attività interrotta forzatamente lo scorso anno per mancanza di fondi; 1.500.000 lire per il Centro estivo internazionale di Matematica pura ed applicata.

Il prof. Sansone ricorda che è stata pubblicata la Bibliografia Matematica Italiana del 1951, che è già apparso il volume I, parte 1ª delle Opere del Bianchi mentre sta per essere terminato il vol. I, parte 2ª e che è stato messo in commercio il I volume degli « Atti » del IV Congresso dell'U M.I. di Taormina. Ricorda pure che è già uscita la copia anastatica del II volume delle Opere di Ruffini e che le Opere di Casorati sono state completate con la stampa del secondo volume.

Il prof. Terracini prende successivamente al parola raccomandando vivamente la ripresa delle Monografie Matematiche del C.N.R. In merito intervengono, dando assicurazioni in proposito, i proff. Bompiani e Sansone.

Su proposta del prof. Sansone all'unanimità viene inviato un cordiale saluto e un ringraziamento al prof. G. Colonnetti, Presidente del C.N.R., per la comprensione mostrata dal C.N.R. per i problemi della Matematica Italiana.

Vengono pure inviate parole di sentiti ringraziamenti al prof. F. Giordani dell'Università di Napoli per l'opera da lui svolta al C.N.R. in favore della Matematica Italiana.