
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIALUISA DE SOCIO

Alcuni teoremi di unicità per le equazioni di Maxwell.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 8
(1953), n.2, p. 196–200.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_196_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Alcuni teoremi di unicità per le equazioni di Maxwell.

Nota di MARIALUISA DE SOCIO (a Bologna).

Sunto. - Come il n. 1.

1. I teoremi di unicità per le equazioni di MAXWELL presuppongono di solito assegnate, come condizioni al contorno, le componenti tangenziali del campo magnetico e del campo elettrico.

In questa nota osserveremo anzitutto che, se in un dominio (D) il mezzo è omogeneo, un campo elettromagnetico regolare (ed armonico con pulsazione assegnata viene completamente determinato dalla conoscenza, anche solo su una porzione σ_1 della superficie σ che limita (D) , della componente tangenziale del campo elettrico e del campo magnetico. Otterrò così un altro teorema di unicità che, per quanto implicitamente usato da alcuni autori ⁽¹⁾, non mi risulta finora enunciato in modo esplicito.

Riprenderò poi una questione sulle guide d'onda ed estenderò un teorema di unicità, enunciato dal GRAFFI, ⁽²⁾ ammettendo che le pareti della guida non siano perfettamente conduttrici o più precisamente che su queste superfici valga, per le componenti tangenziali E_t ed H_t del campo elettrico e del campo magnetico, la relazione ⁽³⁾:

$$(1) \quad E_t = v(1 + j)H_t \wedge m$$

dove v è un numero positivo e m un versore definito in ogni punto della superficie, normale ad essa e diretta verso l'interno del conduttore. Si potrà così, in base all'osservazione precedente, dimostrare il teorema di unicità anche senza l'ipotesi, fatta dal GRAFFI, che la conduttività del mezzo entro la guida sia diversa da zero.

(1) I. C. SLATER, *Microwave electronics* - Van Nostrand Company - Cap. I, § 6.

(2) D. GRAFFI, *Un teorema di unicità per le equazioni di Maxwell e sue applicazioni alla teoria delle guide d'onda*, « Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna », Serie X, Tomo VIII, 1950-1951.

(3) S. A. SCHELKUNOFF, *Electromagnetic waves* - Van Nostrand Company, 1948, cap. VIII, § 21. J. BERNIER, *Sur les cavités électromagnétiques* - L'onde électrique, XXVI (1946), pagg. 305-317.

2. Considerato il dominio (D) , riempito da un mezzo omogeneo, siano E ed H i vettori complessi che rappresentano un campo elettromagnetico armonico e regolare in (D) . Vogliamo provare che non può esistere un altro campo $E + e$, $H + h$ tale che, sulla porzione σ_1 della superficie σ che limita (D) , abbia le stesse componenti tangenziali di E ed H .

In altre parole, intendiamo dimostrare che, se su σ_1 sono nulle le componenti tangenziali e_t ed h_t di e ed h , e ed h sono identicamente nulle in tutto (D) .

Notiamo intanto che, dalla linearità delle equazioni di MAXWELL, segue:

$$(2) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} h = \epsilon j \omega e + \gamma e \\ \operatorname{rot} e = -\mu j \omega h. \end{cases}$$

Si ha subito che anche le componenti normali di e ed h sono nulle in σ_1 . Si consideri infatti una linea chiusa s su σ_1 delimitante una superficie σ' : su s è nulla la circuitazione di h , perchè è nulla h_t , quindi è nullo, per il teorema di STOKES, il flusso di $\operatorname{rot} h$ su σ' .

Dalle (2) segue, se n è il versore normale a σ_1 e diretto verso l'esterno;

$$\int_{\sigma'} \operatorname{rot} h \times n d\sigma' = \int_{\sigma'} (j\omega\epsilon + \gamma)e_n d\sigma' = 0$$

e, per l'arbitrarietà di σ' , $e_n = 0$ in tutto σ_1 . In modo analogo, partendo dalla seconda equazione di (2) si prova nulla anche la componente normale di h su σ_1 , cioè su questa superficie sono nulli e ed h .

Vogliamo ora provare che, sempre su σ_1 , sono nulle $\frac{\partial e}{\partial n}$ e $\frac{\partial h}{\partial n}$.

A questo scopo si ponga, con l'origine in un punto generico P di σ_1 , un sistema di riferimento xyz con l'asse z parallelo a n .

Per dimostrare quanto ci siamo proposti basterà provare nulle le derivate di e ed h lungo z .

Consideriamo le equazioni di MAXWELL in forma cartesiana:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = (j\omega\epsilon + \gamma)e_x \\ \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = (j\omega\epsilon + \gamma)e_y \\ \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = (j\omega\epsilon + \gamma)e_z \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} = -\mu j\omega h_x \\ \frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} = -\mu j\omega h_y \\ \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} = -\mu j\omega h_z \end{cases}$$

Ora, essendo e ed h nulle su σ_1 , saranno nulle in ogni punto P di σ_1 le derivate di e ed h , ossia delle loro componenti, lungo x e y .

Allora le (3) che non si riducono a identità diventano:

$$\frac{\partial h_x}{\partial z} = \frac{\partial h_y}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial e_x}{\partial z} = \frac{\partial e_y}{\partial z} = 0$$

inoltre, per l'annullarsi della divergenza di e ed h , si ha anche:

$$\frac{\partial e_z}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial h_z}{\partial z} = 0$$

ossia in ogni punto di σ_1 , come si è affermato, si ha:

$$\frac{\partial e}{\partial n} = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0.$$

Preso ora un sistema di coordinate cartesiane XYZ con origine ed orientamento qualsiasi, si avrà sempre su σ_1 : e_X , e_Y , e_Z ; h_X , h_Y , h_Z nulle assieme alle loro derivate in direzione normale a σ_1 .

Ora si ha che;

$$(4) \quad \Delta e_X + k^2 e_X = 0$$

con $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - j\gamma\mu$, ed essendo su σ_1 $e_X = \frac{\partial e_X}{\partial n} = 0$, per un noto teorema (4) risulta $e_X = 0$ in tutto (D) . Poichè le altre componenti di e ed h soddisfano ad equazioni analoghe alla (4), anch'esse risultano costantemente nulle in tutto (D) . E il teorema enunciato è perciò completamente provato.

3. Consideriamo ora una guida d'onda, o meglio un tubo cilindrico, a pareti non perfettamente conduttrici; siano assegnate su due sezioni piane, normali all'asse del tubo Σ_1 e Σ_2 che, per ora, supporremo a connessione semplice, le componenti normali del campo elettrico e del campo magnetico. Dimostriamo che il campo, nella porzione di volume V della guida compresa tra le due sezioni e la parete σ , è univocamente determinato.

A questo scopo basterà, al solito, provare identicamente nulli i vettori e ed h che rappresentano la differenza tra due campi soddisfacenti alle condizioni assegnate; ovviamente su Σ_1 e Σ_2 le componenti normali di e e di h sono nulle, ossia $e_n = h_n = 0$.

(4) POCKELS, *Partielle Differentialgleichungen in der Mathematischen Physik*, Leipzig, 1891, p. 212.

Per il teorema di POYNTING relativo a un campo elettromagnetico armonico si ha:

$$(5) \quad \int_{\Sigma_1} \mathbf{e} \wedge \mathbf{h}^* \times \mathbf{n} d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \mathbf{e} \wedge \mathbf{h}^* \times \mathbf{n} d\Sigma_2 + \int_{\sigma} \mathbf{e} \wedge \mathbf{h}^* \times \mathbf{m} d\sigma + \\ + j\omega \int_v (\mu \mathbf{h} \times \mathbf{h}^* - \varepsilon \mathbf{e} \times \mathbf{e}^*) dv + \gamma \int_v \mathbf{e} \times \mathbf{e}^* dv = 0.$$

Ripetendo le considerazioni ed i calcoli della nota citata in (2), detto φ e ψ rispettivamente i potenziali di $\mathbf{e}$ ed $\mathbf{h}$ su Σ_1 , s il contorno di Σ_1 , τ il versore tangente ed $\mathbf{m}$ quello ortogonale ad s e giacente su Σ_1 (quindi normale anche alle pareti della guida), si ha ricordando la ⁽¹⁾:

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{e} \wedge \mathbf{h}^* \times \mathbf{n} d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_1} \text{grad } \varphi \wedge \text{grad } \psi^* \times \mathbf{n} d\Sigma_1 = \\ = - \int_{\Sigma_1} \text{rot } (\varphi \mathbf{n}) \times \text{grad } \psi^* d\Sigma_1 = - \int_{\Sigma_1} \text{div } (\psi^* \text{rot } \varphi \mathbf{n}) d\Sigma_1 = \\ = - \int_s \psi^* \mathbf{e} \times \tau ds = - (1 + j) \int_s \psi^* \mathbf{h} \times \mathbf{m} \wedge \tau ds = 0.$$

Infatti $\mathbf{m} \wedge \tau$ è un versore di Σ_1 normale a τ e a $\mathbf{m}$, perciò a Σ_1 , sicchè $\mathbf{h} \times \mathbf{m} \wedge \tau = 0$, perchè le componenti di $\mathbf{h}$ normali a Σ_1 sono nulle, come si è detto. In modo analogo si prova nullo l'integrale esteso a Σ_2 delle (5).

Si ha poi:

$$\int_{\sigma} \mathbf{e} \wedge \mathbf{h}^* \times \mathbf{m} d\sigma = \int_{\sigma} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{h}^* \times \mathbf{m} d\sigma = v(1 + j) \int_{\sigma} \mathbf{h}_i \wedge \mathbf{m} \times \mathbf{h}_i^* \wedge \mathbf{m} d\sigma.$$

Sostituendo infine nelle (5), considerando la parte reale, si ottiene:

$$v \int \mathbf{h}^* \wedge \mathbf{m} \times \mathbf{h} \wedge \mathbf{m} d\sigma + \gamma \int \mathbf{e} \times \mathbf{e}^* dv = 0$$

da cui segue, anche se $\gamma = 0$:

$$v \int |\mathbf{h} \wedge \mathbf{m}|^2 d\sigma = 0$$

e quindi $\mathbf{h} \wedge \mathbf{m} = 0$, ovvero è nulla la componente tangenziale di $\mathbf{h}$ su σ ; per la (1) risulterà nulla allora anche quella di $\mathbf{e}$.

Per il teorema dimostrato nel § 1 sono allora identicamente nulli in tutto (D) sia $\mathbf{e}$ che $\mathbf{h}$ e il teorema di unicità è completamente provato anche nel caso $\gamma = 0$.

4. Da ultimo trattiamo il caso in cui le superfici piane Σ_1 e Σ_2 non siano a connessione semplice. Per la validità del teorema di unicità sopra enunciato occorre assegnare, oltre alle componenti normali a Σ_1 e Σ_2 dei vettori $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$, anche la circuitazione del campo magnetico lungo le linee s_i che limitano dall'interno le superfici in discorso.

La dimostrazione del paragrafo precedente sussiste ancora se si proverà che i potenziali del campo magnetico $\mathbf{h}$ e del campo elettrico $\mathbf{e}$ sono funzioni monodrome. A questo scopo occorre provare nulla la circuitazione di $\mathbf{e}$ ed $\mathbf{h}$ lungo s_i . Per il vettore $\mathbf{h}$ questa proprietà è ovvia, perchè per ipotesi è assegnata la circuitazione del campo magnetico $\mathbf{H}$ su s_i . Quanto alla circuitazione di $\mathbf{e}$ lungo s_i si nota, indicando con τ il versore tangente ad s_i e tenendo conto della (1):

$$\int_{s_i} \mathbf{e} \cdot d\tau = (1 + j)\nu \int_{s_i} \mathbf{h}_i \wedge \mathbf{m} \times \tau d\tau = 0$$

in quanto $\mathbf{m} \wedge \tau$ è normale a Σ_1 , o Σ_2 , cioè ad $\mathbf{h}_i$.

Risulta così dimostrato, anche in questo caso, il teorema di unicità.

Sulla Nota di C. FUSA: Generalizzazione di un lemma di Chisini.

La Nota del Dr. CARMELO FUSA dal titolo *Generalizzazione di un lemma di Chisini*, apparsa nel vol. VII (1948) di questo « Bollettino » pp. 307-311, riprodotta dall'A. nelle ultime tre pagine di un'altra Nota pubblicata nell'« Archiv der Mathematik », 3 (1952), porta la notazione « lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale di Alta Matematica (I.N.A.M.) Roma ». La Presidenza dell'I.N.A.M. informa che il dottor FUSA non era stato autorizzato ad aggiungere quella annotazione.