Bollettino
Unione Matematica Italiana

Letterio Toscano

Sulle derivate dei polinomi di Laguerre e del tipo ultrasferico rispetto al parametro.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 193–195.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_193_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Sulle derivate dei polinomi di Laguerre e del tipo ultrasferico rispetto al parametro.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *Si assegnano formule sulle derivate, rispetto al parametro, dei polinomi di* LAGUERRE *e di altri del tipo ultrasferico.*

1. In una recente nota [1], F. TRICOMI, fra l'altro, dà sui polinomi di LAGUERRE

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{\alpha+n})$$

le formule

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\log x - \log x \frac{d^n}{dx^n}\right](e^{-x}x^{\alpha+n}) \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{1}{i} L_{n-i}^{(\alpha)}(x). \tag{2}$$

Qui assegno le altre

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{(-1)^{i-1}}{i} L_{n-i}^{(\alpha+i)}(x) \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} W_n^{(s)}(x) = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{1}{2i}\left[(-1)^{i-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^i - \left(\frac{1-x}{2}\right)^i\right] W_{n-i}^{(s+2i)}(x) \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} W_n^{(s)}(x) = \tag{5}$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_i \frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1+x}{2}\right)^i P_{n-i}^{\left(\frac{s-1}{2},\, \frac{s-1}{2}+i\right)}(x) + (-1)^n \left(\frac{1-x}{2}\right)^i P_{n-i}^{\left(\frac{s-1}{2},\, \frac{s-1}{2}+i\right)}(-x)\right],$$

(1) F. G. TRICOMI, *Sulle derivate delle funzioni ipergeometriche confluenti rispetto ai parametri*, « Rend. Acc. Naz. Lincei - Cl. Sci. Fis. Mat. e Nat. », s. VIII, v. XII, 1952, pp. 227-233

dove

$$W_n^{(s)}(x) = \frac{\left(\frac{s+1}{2}, n\right)}{(s, n)} V_n^{(s)}(x),$$

$V_n^{(s)}(x)$ è il polinomio ultrasferico

$$(-1)^n \frac{(s, n)}{n!} {}_2F_1\left(-n, s+n; \frac{s+1}{2}; \frac{1+x}{2}\right)$$

e $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ è il polinomio ipergeometrico

$$\frac{(\alpha+1, n)}{n!} {}_2F_1\left(-n, \alpha+\beta+n+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right).$$

2. Se nella (1) applichiamo la formula ordinaria sulla derivata n-esima del prodotto di due funzioni, si perviene alla (3).

E la stessa si può ottenere con la formula di calcolo simbolico

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} = \log(1 + \Delta_\alpha) = \sum_1^\infty{}_i \frac{(-1)^{i-1}}{i} \Delta_\alpha^i.$$

Per i polinomi $W_n^{(s)}(x)$, poichè

$$V_n^{(s)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(s, n)}{\left(\frac{s+1}{2}, n\right)} \frac{(1-x^2)^{\frac{1-s}{2}}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\frac{s-1}{2}},$$

si ha

$$W_n^{(s)}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{1-s}{2}}}{(-2)^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\frac{s-1}{2}},$$

e successivamente

$$\frac{\partial}{\partial s} W_n^{(s)}(x) = \tag{6}$$

$$= \frac{(-1)^n(1-x^2)^{\frac{1-s}{2}}}{2^{n+1} n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} \log(1-x^2) - \log(1-x^2) \frac{d^n}{dx^n}\right](1-x^2)^{n+\frac{s-1}{2}}.$$

In questa applichiamo la formula ordinaria sulla derivata n-esima del prodotto di due funzioni, e notiamo che

$$\frac{d^i}{dx^i} \log(1-x^2) = \frac{(i-1)!}{(1-x^2)^i}[(-1)^{i-1}(1-x)^i - (1+x)^i].$$

Si deduce

$$\left[\frac{d^n}{dx^n}\log(1-x^2)-\log(1-x^2)\frac{d^n}{dx^n}\right](1-x^2)^{n+\frac{s-1}{2}}=$$
$$=(-1)^n 2^{n+1} n!\,(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}\sum_{1}^{n}{}_i\frac{1}{2i}\left[(-1)^{i-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^i-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1-x}{2}\right)^i\right]\frac{\left(\frac{s+2i+1}{2},\,n-i\right)}{(s+2i,\,n-i)}V_{n-i}^{(s+2i)}(x),$$

dalla quale segue la (4).

Se al secondo membro della (6) si applica la formula ([2]) $\left(D\equiv\frac{d}{dx}\right)$

$$(D^n f)\varphi-(fD^n)\varphi=\sum_{1}^{n}{}_i(-1)^{i-1}\binom{n}{i}D^{n-i}(\varphi D^i f)$$

con le posizioni

$$f=\log(1-x^2)\quad\text{e}\quad\varphi=(1-x^2)^{n+\frac{s-1}{2}},$$

si deduce

$$\frac{\partial}{\partial s}W_n^{(s)}(x)=\frac{(-1)^n(1-x^2)^{\frac{1-s}{2}}}{2^{n+1}n!}\cdot$$
$$\cdot\sum_{1}^{n}{}_i\binom{n}{i}(i-1)!\frac{d^{i-i}}{dx^{n-i}}\left[(1-x)^{n+\frac{s-1}{2}}(1+x)^{n-i+\frac{s-1}{2}}+\right.$$
$$\left.+(-1)^i(1-x)^{n-i+\frac{s-1}{2}}(1+x)^{n+\frac{s-1}{2}}\right].$$

D'altra parte per i polinomi ipergeometrici si ha

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}],$$

e introducendoli nella precedente si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial s}W_n^{(s)}(x)=\sum_{1}^{n}{}_i\frac{1}{2i}\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^i P_{n-i}^{\left(\frac{s-1}{2},\,\frac{s-1}{2}+i\right)}(x)+\left(\frac{x-1}{2}\right)^i P_{n-i}^{\left(\frac{s-1}{2}+i,\,\frac{s-1}{2}\right)}(x)\right].$$

E poichè

$$P_n^{(\beta,\alpha)}(x)=(-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(-x),$$

dalla precedente si passa alla (5).

([2]) C. POSSE, *Ueber eine Identitat der Differentialrechnung*, « Mathematische Sammlung herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau », XIII, pp. 489-491.