
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MASSIMO CIMINO

**Sulle soluzioni dell'equazione generale del
potenziale newtoniano di una sfera fluida
in equilibrio.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 8
(1953), n.2, p. 164–172.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_164_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulle soluzioni dell'equazione generale del potenziale newtoniano di una sfera fluida in equilibrio.

Nota di MASSIMO CIMINO (a Roma).

Sunto. *Per l'equazione:*

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + x^\lambda f(y) = 0$$

si dà il teorema di esistenza ed unicità di quella classe di soluzioni che hanno limite finito per $x \rightarrow +0$, sotto talune condizioni per la $f(y)$ sufficienti per molte applicazioni. Si dà anche un limite inferiore per gli zeri delle soluzioni (Corollario II del Teorema II) ed un criterio sufficiente per l'esistenza, o la non esistenza, dei medesimi (Teorema III).

1. Nel problema dell'equilibrio di un fluido con distribuzione sferica della densità e soggetto alle sole forze newtoniane di mutua attrazione delle sue particelle, si giunge facilmente alla equazione differenziale del 2° ordine alle derivate ordinarie:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + f(y) = 0,$$

y rappresentando il potenziale newtoniano ed x la distanza di un generico punto del fluido dal centro della sfera. La funzione $f(y)$ deve riguardarsi come assegnata; la (1) è una generalizzazione dell'equazione di EMDEN dell'equilibrio dei gas politropici:

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + y^n = 0,$$

alla quale si arriva, come è noto, ammettendo per il fluido supposto gassoso la legge adiabatica generalizzata:

$$(3) \quad p = h\mu^\gamma; \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n},$$

p essendo la pressione e μ la densità del gas. Se al posto della (3) si assume una funzione più generale:

$$(4) \quad p = p(\mu),$$

facilmente si scriverà un'equazione del tipo (1).

Si osservi che una relazione (4) tra p e μ è una necessaria ⁽¹⁾ conseguenza del fatto che le forze di massa equilibranti sono con-

(1) Eccettuato il caso: $\mu = \text{costante}$ (fluidi omogenei incompressibili). Allora è $f(y) = \text{cost.}$

servative ⁽²⁾. Si intende che la formulazione esplicita di tale relazione può essere fatta soltanto sulla base del comportamento fisico del fluido in equilibrio, e può portare a forme diverse dalla (3), che è invece caratteristica dei gas in equilibrio politropico. Nella presente nota si affronta un primo studio della (1), dando un teorema di esistenza ed alcune proprietà più immediate delle soluzioni, più che altro allo scopo di richiamare sul problema l'attenzione dei matematici, specialmente sulle possibili generalizzazioni delle ipotesi che noi abbiamo introdotto per la funzione $f(y)$. In particolare, si segnala il problema dello studio degli integrali della (1) nell'ipotesi in cui la $f(y)$ presenti delle discontinuità di prima specie, poichè questo problema interessa l'equilibrio di distribuzioni sferiche stratificate. Ricordiamo infine che lo studio degli integrali della (2) è stato esaurientemente condotto da G. SANSONE ⁽³⁾, mentre lo studio dell'equazione più generale:

$$\frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{dy}{dx} \right] + Q(x) \cdot y^n = 0$$

è stato fatto da U. RICHARD ⁽⁴⁾.

2. Al posto della (1) consideriamo l'equazione più generale:

$$[E] \quad \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + x^\lambda \cdot f(y) = 0; \quad \lambda > 0,$$

che si riduce alla (1) per $\lambda = 2$, e della quale cercheremo le soluzioni che soddisfano alle condizioni:

$$\begin{cases} [C_1] & y(x) > 0; \quad y'(x) < 0, \quad \text{finite e continue in: } 0 < x \leq x^* \\ [C_2] & \lim_{x \rightarrow +0} y(x) = C; \quad 0 < C < +\infty. \end{cases}$$

Sulla assegnata funzione $f(y)$ faremo le seguenti ipotesi:

$$\begin{cases} [I_1] & \left\{ \begin{array}{l} \text{sia finita e continua, positiva e non decrescente} \\ \text{in } 0 \leq y < +\infty; \text{ eventualmente nulla per } y = 0; \end{array} \right. \\ [I_2] & \left\{ \begin{array}{l} \text{ammetta derivata prima limitata: cioè:} \\ f'(y) = |f'(y)| \leq L; \quad 0 \leq y \leq C; \quad (L = \text{costante}). \end{array} \right. \end{cases}$$

⁽²⁾ Infatti, in tali ipotesi, le superfici isobariche sono anche superfici di uguale densità.

⁽³⁾ G. SANSONE, *Sulle soluzioni di Emden dell'equazione di Fowler*, « Rend. Sem. Mat. dell'Università di Roma », Serie 5^a, Vol. I, (1940), p. p. 163-176.

⁽⁴⁾ U. RICHARD, *Su un'equazione non lineare del secondo ordine*, « Rend. Sem. Mat. Università di Torino », Vol. 10, (1950-51), p. 305.

Si osservi che, nelle ipotesi ora ammesse, la funzione di x ;

$$(5) \quad \varphi(x) = f[y(x)]$$

è sempre *positiva e non crescente* in $0 \leq x \leq x^*$. Ciò posto, enunciamo il seguente:

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ. — *Nelle ipotesi [I] per la $f(y)$, esiste una ed una sola soluzione della [E] che soddisfa alle condizioni [C].*

Il problema $[E][C]$ si trasforma facilmente in una equazione integrale, che si risolve per approssimazioni successive. Si può arrivare a tale equazione nel seguente modo: la soluzione $y(x)$ verifica la relazione:

$$(6) \quad \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + x^\lambda \cdot \varphi(x) = 0.$$

D'altra parte l'equazione differenziale:

$$(7) \quad \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dz}{dx} \right) + x^\lambda \varphi(x) = 0$$

$\varphi(x)$ essendo costruita per mezzo della (5) con *quella* soluzione che verifica la (6), ammette la soluzione:

$$z(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t) \cdot t^\lambda dt + \int_x^{x^*} \varphi(t) t^{\lambda-1} dt$$

come è facile verificare ⁽⁵⁾. Allora la funzione:

$$\Psi(x) = y(x) - z(x)$$

verifica l'equazione:

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Psi}{dx} \right) = 0$$

e quindi sarà:

$$(8) \quad \Psi(x) = \frac{a}{x} + b$$

⁽⁵⁾ Per $\lambda = 2$, la verifica si può evitare pensando che la $z(x)$ rappresenta — a meno di una costante moltiplicativa — il potenziale newtoniano *interno* ad una distribuzione materiale a simmetria sferica di densità $\varphi(x)$, x essendo il raggio vettore. Allora la (7) altro non è che l'equazione di *Poisson* in coordinate polari (y dipendendo soltanto da x).

a e b essendo delle costanti. Ma la $y(x)$ ha, per ipotesi, un valore finito > 0 per $x \rightarrow +0$, e lo stesso accade (come è facile verificare) anche per la $z(x)$; perciò necessariamente $a = 0$. Quindi:

$$y(x) = b + \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t) t^\lambda dt + \int_x^{x^*} \varphi(t) t^{\lambda-1} dt$$

o anche:

$$y(x) = b - \frac{1}{x} \int_0^x (x-t) t^{\lambda-1} \cdot \varphi(t) dt + \int_0^{x^*} \varphi(t) t^{\lambda-1} dt.$$

L'ultimo integrale è una costante; conglobandola con la b , ed osservando che per $x \rightarrow +0$ il 2° termine al 2° membro tende allo zero, dovrà essere per la $[C_2]$: $b = C$, e infine [per la (5)]:

$$[E_1] \quad y(x) = C - \frac{1}{x} \int_0^x (x-t) t^{\lambda-1} f[y(t)] dt; \quad C > 0,$$

che è un'equazione integrale di Volterra, non lineare (in generale), con nucleo singolare.

Inversamente ogni soluzione della $[E_1]$ soddisfa il problema.

3. Per dimostrare il teorema enunciato distinguiamo due casi per l'ipotesi $[L_2]$:

$$(9) \quad L = 0; \quad L > 0.$$

Nel primo di essi la $f(y)$ è una costante ($\neq 0$): $f(y) = f(C)$. Abbiamo allora la soluzione ⁽⁶⁾:

$$(10) \quad \begin{cases} y(x) = C - f(C) \frac{x^\lambda}{\lambda(\lambda+1)}; \\ 0 < x \leq x^*; \quad x^* < x_0 = \left[\frac{C\lambda(\lambda+1)}{f(C)} \right]^{1/\lambda}; \end{cases}$$

che soddisfa alle condizioni $[C_1][C_2]$.

Se è invece: $L > 0$, definiamo nell'intervallo:

$$(11) \quad 0 < x \leq x^*; \quad x^* < x_0 = \left[\frac{C\lambda(\lambda+1)}{f(C)} \right]^{1/\lambda}$$

la successione $\{y_n(x)\}$ delle approssimazioni successive della (E_1)

⁽⁶⁾ cfr. G. SANSONE, *l. c.* p. 167.

con la seguente legge:

$$(12) \quad y_0(x) = C$$

$$(12_1) \quad y_m(x) = C - \frac{1}{x} \int_0^x (x-t)t^{\lambda-1} f[y_{m-1}(t)] \cdot dt; \quad m = 1, 2, \dots$$

Si ha:

$$(13) \quad y_1(x) = C - f(C) \frac{x^\lambda}{\lambda(\lambda+1)} = y_0(x) - f(C) \frac{x^\lambda}{\lambda(\lambda+1)}$$

e quindi:

$$(14) \quad \begin{cases} C = y_0(x) > y_1(x) > 0; & y_1'(x) < 0; & 0 < x \leq x^* \\ \lim_{x \rightarrow +0} y_1(x) = C \end{cases}$$

Supponiamo ora vere le:

$$(14_1) \quad \begin{cases} C = y_0(x) > y_{m-1}(x) > 0; & y'_{m-1}(x) < 0; & 0 < x \leq x^* \\ \lim_{x \rightarrow +0} y_{m-1}(x) = C \end{cases}$$

e dimostriamole per $y_m(x)$. Infatti, valendo la condizione $[I_1]$ e fino a tanto che è: $C \geq y > 0$, è certamente:

$$0 < f(y) \leq f(C)$$

e quindi per le (14₁):

$$0 < f[y_{m-1}(x)] \leq f(C); \quad 0 < x \leq x^*.$$

Il 2° termine a 2° membro della (12₁) è allora (positivo e) certamente minore di:

$$f(C) \frac{1}{x} \int_0^x (x-t)t^{\lambda-1} dt = f(C) \frac{x^\lambda}{\lambda(\lambda+1)}$$

e perciò:

$$(15) \quad C = y_0(x) > y_m(x) > 0; \quad 0 < x \leq x^*.$$

Quanto alle:

$$(15_1) \quad y'_m(x) < 0; \quad \lim_{x \rightarrow +0} y_m(x) = C$$

esse discendono subito dalla (12₁).

Calcoliamo ora la successione di termini:

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(x) - y_m(x)| &= \frac{1}{x} \int_0^x (x-t)t^{\lambda-1} |f[y_m(t)] - f[y_{m-1}(t)]| dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x (x-t)t^{\lambda-1} \cdot |y_m(t) - y_{m-1}(t)| \cdot \left| \frac{f[y_m(t)] - f[y_{m-1}(t)]}{y_m(t) - y_{m-1}(t)} \right| \cdot dt. \end{aligned}$$

Per la $[I_2]$ abbiamo :

$$(16) \quad |y_{m+1}(x) - y_m(x)| \leq \frac{L}{x} \int_0^x (x-t)^{\lambda-1} \cdot |y_m(t) - y_{m-1}(t)| \cdot dt,$$

ed essendo per la (13) :

$$|y_1(x) - y_0(x)| = f(C) \frac{x^\lambda}{\lambda(\lambda+1)}; \quad 0 < x \leq x^*,$$

per induzione, dalla (16) otteniamo :

$$(17) \quad |y_{m+1}(x) - y_m(x)| \leq \frac{L^m}{\{\lambda(\lambda+1)\} \cdot \{2\lambda(2\lambda+1)\} \dots \{(m+1)\lambda[(m+1)\lambda+1]\}} \cdot x^{(m+1)\lambda}.$$

Maggiorando allora con questi i valori assoluti dei termini della serie :

$$y(x) = y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + \dots + [y_{m+1}(x) - y_m(x)] + \dots$$

e applicando il criterio del rapporto, ne risulta che la successione $\{y_m(x)\}$ è uniformemente ed assolutamente convergente in $0 < x \leq x^*$, e perciò è ivi uniformemente :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(x) = y(x); \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f[y_m(x)] = f[y(x)],$$

e ciò prova che la (12₁), passando il limite per $m \rightarrow \infty$, risolve la $[E_1]$. Essa soddisfa perciò anche all'equazione $[E]$ con le condizioni $[C]$.

Quanto alla *unicità* della soluzione questa si prova con un noto ragionamento. Sia infatti $y(x)$ una soluzione dell'equazione $[E_1]$ in $0 < x \leq x^*$ definito dalle (11). Sottraendo da essa la (12₁), avremo nello stesso intervallo :

$$y(x) - y_{m+1}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (x-t)^{\lambda-1} \cdot |f[y_m(t)] - f[y(t)]| \cdot dt.$$

Poichè è: $0 < y \leq C$, per la $[I_2]$ e la (15) è :

$$|f[y_m(x)] - f[y(x)]| \leq L |y_m(x) - y(x)|$$

e quindi :

$$(18) \quad |y(x) - y_{m+1}(x)| \leq \frac{L}{x} \int_0^x (x-t)^{\lambda-1} \cdot |y(t) - y_m(t)| \cdot dt, \quad (m = 0, 1, \dots).$$

Applicando il metodo delle successive approssimazioni, e ponendo:

$$|y(x) - y_0(x)| = f(C) \frac{x^\lambda}{\lambda(\lambda + 1)}$$

si ha dalla (18), con procedimento di induzione:

$$|y(x) - y_{m+1}(x)| \leq \frac{L^m}{\lambda(\lambda + 1) \cdot \{2\lambda(2\lambda + 1) \dots (m + 1)\lambda[(m + 1)\lambda + 1]\}} x^{(m+1)\lambda}$$

e quindi $\lim_{x \rightarrow \infty} y_m(x) = y(x)$ in $0 < x \leq x^*$.

4. Sulle soluzioni della [E] si possono stabilire i seguenti teoremi:

TEOREMA I. - Se, nelle ipotesi [I] per la $f(y)$, la funzione $y = y(x)$ è una soluzione della [E] che soddisfa alle condizioni [C], allora è:

$$(19) \quad \lim_{x \rightarrow +0} y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } \lambda > 1 \\ -\frac{1}{2}f(C) & \text{per } \lambda = 1 \\ -\infty & \text{per } \lambda < 1. \end{cases}$$

Infatti, costruita con la $y(x)$ la (5), si costruisca poi la (8), la quale differisce dalla $y(x)$ per una costante. Ma $\varphi(x)$ è certamente continua (a destra) per $x = 0$. Dunque:

$$\lim_{x \rightarrow +0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow +0} z'(x)$$

e basta derivare la $z(x)$ e passare al limite per $x \rightarrow +0$, per provare il teorema.

TEOREMA II (di confronto). - Se $f_1(y)$, $f_2(y)$, sono due funzioni della classe [I] e se:

$$(25) \quad \begin{cases} f_1(y) < f_2(y); & 0 < y < C \\ f_1(C) = f_2(C) = K \end{cases}$$

allora è necessariamente per le soluzioni di classe [C] delle corrispondenti equazioni [E]:

$$(26) \quad \begin{cases} y_1(x) > y_2(x); & 0 < x \leq x^* \\ x^* < x_0 = \left[\frac{C\lambda(\lambda + 1)}{K} \right]^{1/\lambda}. \end{cases}$$

Dimostriamo per assurdo. Supponiamo infatti che sia:

$$(27) \quad y_1(x) \leq y_2(x); \quad 0 < x \leq x^*.$$

Allora, per la (5) e le (25), si ha certamente (tenendo presenti le [I]) a maggior ragione:

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x); \quad 0 < x \leq x^*,$$

e quindi per le due soluzioni (n. 3):

$$\begin{cases} y_1(x) = C - \frac{1}{x} \int_0^x (x-t)t^{\lambda-1} \varphi_1(t) dt \\ y_2(x) = C - \frac{1}{x} \int_0^x (x-t)t^{\lambda-1} \varphi_2(t) dt \end{cases}; \quad 0 < x \leq x^*$$

risulta:

$$y_1(x) > y_2(x)$$

che contraddice la (27).

Ricordiamo ora che l'equazione (7):

$$(28) \quad \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + Kx^\lambda = 0$$

ha un integrale positivo in $(0, x_0)$, che assume il valore C per $x=0$ ed il valore nullo per:

$$(29) \quad x = x_0 = \left[\frac{C\lambda(\lambda+1)}{K} \right]^{1/\lambda}.$$

Questo integrale divide il quadrante $x > 0, y > 0$ in due zone, una delle quali è limitata da esso stesso e dagli assi coordinati.

Ciò posto si hanno subito i corollari:

COROLLARIO I. - Se:

$$(30) \quad \begin{cases} f(y) < K; & 0 < y < C \\ f(C) = K \end{cases}$$

le curve integrali di classe [C] della [E] risultano tutte esterne alla suddetta zona limitata, e assumono per $x=0$ il valore C .

Naturalmente, ciò vale fino a tanto che la soluzione della [E] può essere rappresentata dalla $[E_1]$; ora, il teorema di esistenza

(7) cfr. G. SANSONE, l. c. p. 167.

del n. 3 assicura che ciò è vero, ma solo fino a tanto che x è contenuta in $0 < x \leq x^*$. Ammettendo però che la soluzione sia valida anche per valori di $x > x^*$, si hanno allora i seguenti:

COROLLARIO II. - *Se, nell'ipotesi (30), la soluzione della [E] ha uno zero per $x = \xi < +\infty$, allora è:*

$$(31) \quad \xi > x_0 = \left[\frac{C\lambda(\lambda+1)}{K} \right]^{1/\lambda}.$$

COROLLARIO III. - *Se nelle condizioni del Teorema II la soluzione della [E] relativa alla $f_1(y)$ ha uno zero per $x = \xi < +\infty$, allora l'integrale della [E] relativo alla $f_2(y)$ ha uno zero per $x = \xi_2$, ed è:*

$$(32) \quad x_0 \leq \xi_2 < \xi_1.$$

COROLLARIO IV. - *Se nelle condizioni del Teorema II la soluzione della [E] relativa alla $f_2(y)$ non ha zeri per x finito, allora l'integrale della [E] relativo alla $f_1(y)$ non può avere neppure esso uno zero per x finito.*

In particolare, poichè si dimostra ⁽⁸⁾ che per $f(y) = y^n$ la soluzione di classe [C] della [E] ha uno zero per $x = \xi_1 < +\infty$ se è:

$$n < 2\lambda + 1,$$

mentre non ha zeri a distanza finita se è:

$$n \geq 2\lambda + 1,$$

si ha subito il:

TEOREMA III. - *Condizione sufficiente affinché la soluzione di classe [C] della [E], nelle ipotesi [I], abbia uno zero per un valore finito di x è che sia:*

$$(33) \quad \begin{cases} y^n < f(y); & 0 < y < C \\ C^n = f(C) \end{cases}$$

con:

$$(34) \quad n < 2\lambda + 1.$$

Condizione sufficiente affinché la detta soluzione non abbia zeri a distanza finita è che sia:

$$(33') \quad \begin{cases} y^n > f(y); & 0 < y < C \\ C^n = f(C) \end{cases}$$

con:

$$(34') \quad n \geq 2\lambda + 1.$$

In conclusione, ringrazio il prof. G. SANSONE per i molti suggerimenti critici durante la redazione del lavoro.

⁽⁸⁾ cfr. *Ibidem*, p. 164.