Bollettino
Unione Matematica Italiana

Bruno Pini

Su certi integrali analoghi ai potenziali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 159–163.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_159_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Su certi integrali analoghi ai potenziali.

Nota di Bruno Pini (a Bologna) (*).

Sunto. - *Indicando con* $\mathrm{U}(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ *la soluzione fondamentale dell'equazione del calore in uno spazio a un numero arbitrario di dimensioni e con* $\mathfrak{V}$ *una varietà opportunamente regolare, si esamina il comportamento dell'integrale* $\int_{\mathfrak{V}}[\mathrm{U}(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})]^{\alpha}d_{\mathrm{Q}}\mathfrak{V}$ *al tendere di* P *a un punto della varietà.*

Seguendo una locuzione in uso, diremo che un insieme chiuso $\mathfrak{V}$ dell'S_n è una *varietà regolare senza bordo a* q *dimensioni* $(0 \leq q \leq n-2)$ se, per $q=0$, è costituito da un unico punto e se, per $q>0$, ad ogni punto Q di $\mathfrak{V}$ si può associare un suo intorno ipersferico $\mathfrak{J}$ e un campo T dello spazio euclideo S_q a q dimensioni, tali che si possa stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti di $\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{J}$ e quelli di T in modo che, indicando con $s_1,\ s_2, \ldots,\ s_q$ le coordinate dei punti di S_q e con $x_h(s_1,\ s_2, \ldots,\ s_q)$, $h=1,\ 2, \ldots, n$, quelle del corrispondente punto di $\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{J}$, le x_h risultino continue con le derivate parziali dei primi due ordini su T e la matrice jacobiana $\| \partial x/\partial s_k \|$ abbia costantemente caratteristica q su T.

Ora in certe questioni, connesse con le equazioni a derivate parziali di tipo ellittico, interessa conoscere il comportamento del potenziale

$$\int_{\mathfrak{V}} f(Q)\frac{d_{\mathrm{Q}}\mathfrak{V}}{\overline{PQ}^{\alpha}}, \tag{1}$$

(6) Cfr. per un problema del genere: E. Magenes, *Problemi di valori al contorno per l'equazione differenziale* $\mathrm{y}^{(n)} = \lambda \mathrm{f}(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{y}', \ldots,\ \mathrm{y}^{(n-1)})$, « Annali di Mat. pura ed appl. », (4) 27 (1948), pp. 39-74; p. 74, *b*).

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

con α numero positivo $\leq n-2$, relativo a una distribuzione di densità $f(Q)$ sulla varietà limitata $\mathfrak{V}$, q-dimensionale, dell'S_n, allorchè il punto P (non di $\mathfrak{V}$) tende a un punto di $\mathfrak{V}$.

Se la varietà soddisfa certe condizioni di regolarità del tipo sopra specificato e se la densità $f(Q)$ è una funzione continua e positiva, detto comportamento è stato precisato, in funzione della distanza di P da $\mathfrak{V}$, da G. GIRAUD ([1]), come estensione di classici risultati.

Abbandonando tali ipotesi di regolarità, il comportamento del potenziale (1) può essere molto vario come ha mostrato G. ASCOLI ([2]) il quale ha ricercato condizioni sufficienti per la divergenza del potenziale (1) esteso a una varietà limitata e misurabile.

Orbene, in connessione con le equazioni paraboliche, è opportuno conoscere il comportamento dell'integrale

$$\int_{\mathfrak{V}} [U(P,\ Q)]^{\alpha} d_Q \mathfrak{V}, \tag{2}$$

con α numero positivo ≤ 1, che chiameremo ancora *potenziale*, ove $U(P, Q)$ è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore, ossia, indicando con $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ un punto P dell'S_{n+1},

$$U(P,\ Q) = \begin{cases} (y-\eta)^{-n/2} \exp\left[-\sum_1^n {}_i (x_i - \xi_i)^2/4(y-\eta)\right] & \text{per} \quad y > \eta \\ 0 & \text{»} \quad y \leq \eta. \end{cases}$$

Noi supporremo che la varietà $\mathfrak{V}$ sia del tipo specificato all'inizio, il che permette una formulazione semplice e generale del comportamento del potenziale (2) allorchè il punto P (non di $\mathfrak{V}$) tende a un punto di $\mathfrak{V}$. Però, a differenza di quanto avviene per il potenziale (1), nel caso parabolico bisogna distinguere se la varietà $\mathfrak{V}$ appartiene o no a un iperpiano caratteristico.

I. Supponiamo dapprima che la varietà q-dimensiomale $\mathfrak{V}$ $(0 < q \leq n-1)$ appartenga all'iperpiano caratteristico $y = a$.

Fissiamo un punto, 0, di essa come origine su tale iperpiano. Sia $\mathfrak{I}_0$ un intorno ipersferico di 0 tale che $\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{I}_0$ sia suscettibile della rappresentazione parametrica regolare $\xi_i = \xi_i(s_1,\ s_2, \ldots,\ s_q)$, $i = 1,\ 2, \ldots,\ n$, sull'intorno ipersferico, dell'S_q, $\sum_1^q {}_i s_i^2 \leq \delta^2$. Detta

([1]) G. GIRAUD in G. ASCOLI - P. BURGATTI - G. GIRAUD, *Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico*, Firenze 1936, p. 149.

([2]) G. ASCOLI, *Sul potenziale newtoniano di una distribuzione lineare e funzioni analoghe*, «Rend. R. Istit. Lombardo», 63, (1930), 447-455.

porzione $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{I}_0$ della $\mathfrak{V}$, si potrà rappresentare col vettore

$$\sum_{1}^{q}{}_h s_h u_h + \frac{1}{2} \sum_{1}^{q}{}_{hk} s_h s_k u_{hk}$$

ove la i–esima componente di u_h è la derivata $\frac{\partial \xi_i}{\partial s_h}$ calcolata nel punto $s_1 = s_2 = \ldots = s_q = 0$, mentre la i–esima componente di u_{hk} è la derivata $\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial s_h \partial s_k}$ calcolata in un certo punto θs_1, $\theta s_2, \ldots, \theta s_q$, $(0 < \theta < 1)$. Supponiamo ora che il punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ si proietti ortogonalmente sull'iperpiano $y = a$ in un punto appartenente alla normale alla varietà nell'origine in tale iperpiano. Sarà perciò, detto x il vettore di componenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x \times u_h = 0 \qquad \text{per } h = 1, 2, \ldots, q.$$

Supponiamo poi che la rappresentazione parametrica della varietà sia tale che riesca

$$u_h \times u_k = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad h = k \\ 0 & \text{»} \quad h \neq k. \end{cases}$$

Sarà perciò

$$\sum_{1}^{n}{}_i (x_i - \xi_i)^2 = \sum_{1}^{q}{}_h s_h^2 + |x|^2 + \frac{1}{4}\left(\sum_{1}^{q}{}_{hk} s_h s_k u_{hk}\right)^2 -$$
$$- x \times \sum_{1}^{q}{}_{hk} s_h s_k u_{hk} + \sum_{1}^{q}{}_h s_h u_h \times \sum_{1}^{q}{}_{hk} s_h s_k u_{hk}.$$

Non appena δ e $|x|$ sono abbastanza piccoli, si potranno determinare due costanti positive μ_1 e μ_2 tali che

$$\mu_1 \sum_{1}^{q}{}_h s_h^2 + |x|^2 < \sum_{1}^{n}{}_i (x_i - \xi_i)^2 < \mu_2 \sum_{1}^{q}{}_h s_h^2 + |x|^2.$$

L'integrale esteso a $\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V} - \mathfrak{V}_1$ si mantiene evidentemente limitato; l'integrale esteso a $\mathfrak{V}_1$, posto $\|\partial\xi_i/\partial s_j\|^2 = \Omega^2$, vale

$$(y-a)^{-(n\alpha-q)/2} \exp\left(-\alpha |x|^2/4(y-a)\right) \int_{R_1} (y-a)^{-q/2} \exp \alpha \Big\{ - \Big[\sum_{1}^{q}{}_h s_h^2 +$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\sum_{1}^{q}{}_{hk} s_h s_k u_{hk}\right)^2 - x \times \sum_{1}^{q}{}_{hk} s_h s_k u_{hk} + \sum_{1}^{q}{}_h s_h u_h \times$$
$$\times \sum_{1}^{q}{}_{hk} s_h s_k u_{hk} \Big] / 4(y-a) \Big\} \Omega \, ds_1 ds_2 \ldots ds_q,$$

dove R_1 sta ad indicare l'intorno $\sum_{1}^{q}{}_i s_i^2 \leq \delta'$. L'integrale ora scritto è compreso tra

$$M_1\int\limits_{R_1}(y-a)^{-q/2}\exp\left[-\mu_1\alpha\sum_1^q{}_h\, s_h^2/4(y-a)\right]ds_1ds_2\dots ds_q$$

e

$$M_2\int\limits_{R_1}(y-a)^{-q/2}\exp\left[-\mu_2\alpha\sum_1^q{}_h\, s_h^2/4(y-a)\right]ds_1ds_2\dots ds_q,$$

dove M_1 ed M_2 sono due certe costanti positive. In una rappresentazione polare col polo nell'origine, gli ultimi due integrali si scrivono

$$H\int_0^\delta \rho^{q-1}(y-a)^{-q/2}\exp\left[-\mu_i\alpha\rho^2/4(y-a)\right]d\rho \qquad (i=1,\ 2),$$

ove H è la misura della ipersuperficie sferica dell'S_q di raggio uno; essi, come subito si verifica, sono due quantità positive crescenti ma limitate per $y \to a$.

Pertanto il potenziale (2) esteso a $\mathfrak{V}_1$ si compoıta come

$$(y-a)^{-(n\alpha-q)/2}\exp\left[-\alpha\,|\,x\,|^2/4(y-a\right]$$

II. Supponiamo ora che la varietà q-dimensionale $\mathfrak{V}$ non appartenga a un iperpiano caratteristico, e, fissato un suo punto, 0, che per semplicità supponiamo sia l'origine, quella parte della varietà $\mathfrak{V}$ che appartiene a un certo intorno ipersferico $\mathfrak{J}_0$ di 0, sia suscettibile di una rappresentazione parametrica regolare $_i\xi=\xi_i\ (s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_{q-1}\ .\ \eta)$, $i=1,\ 2,\ \dots,\ n$, sull'insieme $\sum_1^{q-1}{}_i\ s_i^2 \leq \delta^2$, $b_1 \leq \eta \leq b_2$. Potremo rappresentare $\mathfrak{V}_1=\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{J}_0$ col vettore

$$\sum_1^{q-1}{}_i\, s_iu_i+\eta v+\frac{1}{2}\left(\sum_1^{q-1}{}_{ij}\, s_is_ju_{ij}+2\eta\sum_1^{q-1}{}_i\, s_iv_i+\eta^2w\right)$$

dove le h-esime componenti di u_i e v sono rispettivamente le derivate $\frac{\partial\xi_h}{\partial s_i}$ e $\frac{\partial\xi_h}{\partial\eta}$ calcolate nel punto $s_1=s_2=\dots=s_{q-1}=0$, $\eta=0$, mentre le h-esime componenti di u_{ij}, v_i, w sono le derivate $\frac{\partial^2\xi_h}{\partial s_i\partial s_j}$; $\frac{\partial^2\xi_h}{\partial s_i\partial\eta}$, $\frac{\partial^2\xi_h}{\partial\eta^2}$ calcolate in un certo punto $\theta s_1,\ \theta s_2, \dots,\ \theta s_{q-1}$, $\theta\eta$, $(0<\theta<1)$. Supponiamo che sia

$$u_h\times u_k=\begin{cases}1 & \text{per}\quad h=k\\ 0 & \ \ »\quad\ \ h\neq k\end{cases},\quad |\,v\,|^2=1,\quad u_h\times v=0.$$

Sia ora P il punto dell'iperpiano $y=0$, rappresentato ivi dal vettore x, tale che

$$x \times u_i = 0 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, q-1.$$

Come precedentemente, ci riferiamo alla porzione $\mathfrak{V}_1$ della varietà $\mathfrak{V}$ perchè il potenziale relativo alla parte restante è limitato. Si ha

$$\sum_1^n{}_i (x_i - \xi_i)^2 = \sum_1^{q-1}{}_i s_i^2 + |x|^2 + \sum_1^{q-1}{}_{ij} s_i s_j u_{ij} \times \sum_1^{q-1}{}_i s_i u_i -$$
$$- x \times \sum_1^{q-1}{}_{ij} s_i s_j u_{ij} + \frac{1}{4}\left(\sum_1^{q-1}{}_{ij} s_i s_j u_{ij}\right)^2 + \eta\Phi$$

ove Φ è una quantità, che non interessa esplicitare, la quale si mantiene limitata al variare del punto $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta$ sulla $\mathfrak{V}_1$. Poichè $\exp(\eta\Phi/4\eta)$ si mantiene compreso tra due quantità positive, possiamo senz'altro supporre $\Phi = 0$. Allora, per quanto è stato detto precedentemente, il comportamento del potenziale (2) esteso a $\mathfrak{V}_1$ è quello dell'integrale

$$\int_{-h}^{0} (-\eta)^{-(\alpha n - q + 1)/2} \exp(\alpha\, |x|^2/4\eta)\, d\eta$$

dove h è una certa costante positiva, ossia, come subito si verifica, il potenziale anzidetto si comporta come

$$\begin{array}{lll} |x|^{-(\alpha n - q - 1)} & \text{per} & q < \alpha n - 1 \\ \lg |x| & \text{»} & q = \alpha n - 1. \end{array}$$

Concludendo:

Se $\mathfrak{V}$ è una varietà limitata q*-dimensionale del tipo specificato all'inizio, non appena* P (*non di* $\mathfrak{V}$) *è abbastanza prossimo a* $\mathfrak{V}$:

se $\mathfrak{V}$ *appartiene all'iperpiano* $y = a$, *si ha*

$$\int_{\mathfrak{V}} [U(P, Q)]^\alpha d_Q\mathfrak{V} = f(P)(y-a)^{-(\alpha n - q)/2} \exp[-\alpha\, |x|^2/4(y-a)] + \varphi(P)$$

dove $|x|$ *è la distanza da* $\mathfrak{V}$ *del piede della normale per* P *all'iperpiano* $y = a$ *ed* f(P), φ(P) *sono funzioni positive limitate;*

se $\mathfrak{V}$ *non appartiene nè è tangente ad alcun iperpiano caratteristico, si ha*

$$\int_{\mathfrak{V}} [U(P, Q)]^\alpha d_Q\mathfrak{V} = \begin{cases} f(P)\, |x|^{-(\alpha n - q - 1)} + \varphi(P) & \text{per} \quad q < \alpha n - 1 \\ f'(P)\, |\lg |x|| + \varphi'(P) & \text{»} \quad q = \alpha n - 1 \end{cases}$$

ove $|x|$ *è distanza di* P, *misurata sull'iperpiano caratteristico passante per* P, *dalla traccia su questo della varietà* $\mathfrak{V}$ *ed* f(P), f'(P), φ(P), φ'(P) *sono certe funzioni positive limitate.*