
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCESCO SBRANA

Sul teorema di unicità per le equazioni differenziali della meccanica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 8
(1953), n.2, p. 123–127.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_123_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Sul teorema di unicità
per le equazioni differenziali della Meccanica.**

Nota di FRANCESCO SBRANA (a Genova).

Sunto. - *È contenuto nel n. 1 del testo.*

1. Ci proponiamo di esporre in ciò che segue una dimostrazione, fondata sul teorema dell'energia, della proprietà di un sistema materiale di restare in quiete quando siano nulle le velocità, e le accelerazioni iniziali dei suoi punti, ed inoltre le forze attive agenti sul sistema e gli eventuali vincoli soddisfino ad opportune condizioni, che verranno più oltre specificate.

Esaminiamo successivamente il caso in cui le equazioni differenziali fornite dai principi della Meccanica per il sistema considerato, in corrispondenza di determinate condizioni iniziali, ammettano due o più soluzioni; e proponiamo di eliminare tale ambiguità mediante l'introduzione di un semplicissimo postulato.

2. Sia S il sistema di punti materiali A_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), riferito ad una terna fissa di assi cartesiani ortogonali x, y, z di

origine O , soggetto a vincoli fissi, bilaterali, esprimibili mediante le k equazioni, indipendenti e non contraddittorie,

$$(1) \quad \sum_i^n \Phi_i^{(l)} \times \delta A_i = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

dove i δA_i sono spostamenti virtuali dei punti A_i , a partire da una generica configurazione di S (compatibile coi vincoli), definita dalle coordinate x_i, y_i, z_i dei punti stessi A_i , e i $\Phi_i^{(l)}$ sono vettori funzioni continue (e limitate) di tali coordinate, insieme con le loro derivate parziali prime, in tutto un campo Q definito da limitazioni del tipo

$$x_h^{(0)} \leq x_h \leq x_h^{(1)}, \quad y_h^{(0)} \leq y_h \leq y_h^{(1)}, \quad z_h^{(0)} \leq z_h \leq z_h^{(1)},$$

al quale intenderemo riferirci sempre nel seguito.

Il sistema S sia inoltre soggetto a forze attive posizionali $F_i(A_i)$, continue anch'esse in Q , con le loro derivate parziali prime.

È noto che le reazioni Φ_i sviluppate dai vincoli considerati durante il moto di S possono essere poste sotto la forma,

$$(2) \quad \Phi_i = \sum_k^h \lambda_k \Phi_i^{(h)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Valendosi poi delle equazioni differenziali

$$(3) \quad m_i \frac{dV_i}{dt} = F_i + \Phi_i,$$

e delle condizioni [dedotte dalle (1)],

$$(4) \quad \sum_i^n \Phi_i^{(l)} \times V_i = 0,$$

si riesce a determinare i coefficienti λ_k in funzione delle x_i e $\dot{x}_i$ ⁽¹⁾.

In particolare interessa, (per ciò che vogliamo osservare in seguito), che ogni λ_k risulta somma di una funzione delle sole x_i , e di termini bilineari rispetto alle $\dot{x}_i$.

Al sistema normale di equazioni differenziali che si ottiene dalle (3) dopo la eliminazione dei λ_k è naturalmente applicabile il teorema di unicità. In particolare, se sono nulle le velocità e le

(¹) Per brevità nominiamo solo la 1^a delle coordinate di A_i , e delle loro derivate temporali. Per il risultato indicato sopra, cfr.: ORAZIO TEDONE, *Lezioni di Meccanica razionale*, (litografie), Genova, 1921. Ved. anche: E. GUGINO, *Sur la détermination des forces de réaction dans le mouvement d'un système matériel*, «Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences», t. 191. p. 1118, séance du 8 décembre 1930.

accelerazioni iniziali, quindi anche nulli i valori iniziali dei secondi membri delle anzidette equazioni differenziali, si avrà la quiete.

3. Una semplice dimostrazione per assurdo dell'ultimo risultato ora esposto, si può ottenere nel modo che segue.

Se nonostante che siano nulle le velocità e le accelerazioni iniziali si ha movimento, dal teorema dell'energia discende intanto

$$(5) \quad \frac{dT}{dt} = \sum_i^n \mathbf{F}_i \times \mathbf{V}_i = \sum_i^n (\mathbf{F}_i + \Phi_i) \times \mathbf{V}_i,$$

con

$$(6) \quad T = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i V_i^2;$$

e sarà $T > 0$, almeno in un intervallo di tempo $(0, t_1)$, sufficientemente piccolo, a partire dall'istante zero, iniziale. Posto quindi, in modo noto.

$$(7) \quad + \sqrt{T} = \frac{ds}{dt},$$

resta definita una variabile s , che si può ritenere crescente dal valore zero ad un valore s_1 , quando t cresce da zero a t_1 ; e dovrà risultare

$$(8) \quad t_1 = \int_0^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{T}}.$$

Osserviamo però che per le (5), (7),

$$(9) \quad \frac{dT}{ds} = \sum_i^n (\mathbf{F}_i + \Phi_i) \times \frac{\mathbf{V}_i}{\sqrt{T}}.$$

Ora è chiaro che

$$(10) \quad \left| \frac{\mathbf{V}_i}{\sqrt{T}} \right| = \sqrt{\frac{2}{m_i}} \left| \frac{\sqrt{m_i} \mathbf{V}_i}{\sqrt{2T}} \right| \leq \sqrt{\frac{2}{m_i}}.$$

Inoltre si ha

$$\mathbf{F}_i + \Phi_i = s \left[\frac{d(\mathbf{F}_i + \Phi_i)}{ds} + \varepsilon_i \right],$$

dove ε_i è infinitesimo con s .

D'altra parte

$$\frac{d\mathbf{F}_i}{ds} = \sum_h^n \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_h} \frac{\dot{x}_h}{\sqrt{T}} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial y_h} \frac{\dot{y}_h}{\sqrt{T}} + \dots \right);$$

e a causa della (10), e delle ipotesi fatte per le $\mathbf{F}_i$, il 2° membro è limitato.

Un risultato analogo si ottiene per quei termini di $\frac{d\Phi_i}{ds}$ che contengono le derivate parziali di Φ_i rispetto alle coordinate x_j , se tali derivate sono limitate. I termini rimanenti sono del tipo

$$A_{ih} \dot{x}_i \frac{d\dot{x}_h}{ds} = A_{ih} \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{T}} \ddot{x}_h,$$

e tendono a zero per $s \rightarrow 0$, (poichè le accelerazioni iniziali sono nulle), se i coefficienti A_{ih} (che dipendono solo dalle x_i) sono limitati.

Con ciò segue dalla (9) che esiste un numero finito positivo H tale che

$$\frac{dT}{ds} < Hs,$$

ossia (per s positivo sufficientemente piccolo)

$$T < \frac{1}{2} Hs^2.$$

Risulta così, (per $0 < s \leq s_1$),

$$\frac{1}{\sqrt{T}} > \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{1}{s}.$$

Ciò prova che l'integrale (8) non esiste. Non è quindi possibile il moto del sistema S , quando sussistono le ipotesi fatte sopra.

4. Vogliamo ora occuparci della seconda questione accennata in principio, cioè dei casi in cui le equazioni differenziali della Meccanica ammettano più di una soluzione; come avviene nel noto esempio del moto rettilineo di una massa elementare, definito dall'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = kx^\alpha,$$

con le condizioni iniziali

$$x = \dot{x} = 0, \quad \text{per } t = 0,$$

k ed α essendo due costanti positive, la 2^a minor d'uno. È allora possibile la quiete, ovvero un movimento, in cui

$$x = ct^n,$$

con c ed n costanti positive (la 2^a maggiore di 2; precisamente

$$n = \frac{2}{1 - \alpha}).$$

Propongo di eliminare tali ambiguità, ammettendo che *si realizzi quella soluzione in corrispondenza della quale è minimo il lavoro delle forze attive, e quindi minima la variazione dell'energia cinetica a partire dalla configurazione iniziale del corpo.*

Così p. es. se le velocità iniziali sono nulle, e secondo le equazioni differenziali è possibile la quiete, o il moto, dall'integrale dell'energia,

$$T = L,$$

discende che si deve avere la quiete (non potendo certo essere resistente il lavoro L delle forze attive durante il moto del sistema).