BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

G. ASCOLI

**Sul comportamento asintotico delle
soluzioni dell'equazione $y'' - (1 + \eta)y = 0$.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 8
(1953), n.2, p. 115–123.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_115_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sul comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione $y'' - (1 + \eta)y = 0$.

Nota di G. ASCOLI (a Torino).

Sunto. - Con metodo semplice ed uniforme si ritrovano e completano risultati di A. WINTNER e P. HARTMAN sulla equazione $y'' - (1 + \eta)y = 0$; dando, in particolare, il comportamento asintotico dei suoi integrali nelle due ipotesi: $|\eta|^p$ (con $1 \leq p \leq 2$) integrabile tra 0 e $+\infty$; $1 + \eta = \beta^2 + C$ con $\beta^2 \rightarrow 1$ per $x \rightarrow \infty$, e a variazione limitata tra 0 e $+\infty$ e $|C|$ integrabile tra 0 e $+\infty$.

Lo studio del comportamento asintotico degli integrali dell'equazione differenziale.

$$(1) \quad y'' - A(x)y = 0$$

nel caso in cui, per $x \rightarrow \infty$, la $A(x)$ tenda ad una costante *positiva* (che può sempre supporre eguale ad 1), od in ipotesi a questa assimilabili, rientra in parte in noti teoremi di PERRON, HUKUHARA, CESARI, FAEDO, LEVINSON, LEVI, relativi ad equazioni o sistemi di tipo più generale; ma ha formato altresì oggetto particolare di studi recenti di A. WINTNER [5], P. HARTMAN [2], R. BELLMAN [1].

Avendo voluto tentare per scopi didattici un'esposizione indipendente di tutto l'argomento, e in particolare di alcuni dei risultati dei primi due Autori citati (¹), ho potuto rilevare che ciò poteva farsi con molta semplicità, e con qualche interessante precisazione, facendo uso sistematico di quelle «funzioni ausiliarie» che, da Liapunof in poi, hanno trovato in questi problemi utile impiego. Dedico perciò alla questione le pagine che seguono, dove, più che risultati essenzialmente nuovi, dovrà cercarsi un'impostazione da tenere presente in ulteriori ricerche.

Non mi occuperò invece dei risultati di BELLMAN che saranno ritrovati, corretti e largamente estesi in un prossimo lavoro.

1. La prima questione che si presenta è quella della esistenza di integrali della (1) per i quali y , oppure y e y' , tendano per $x \rightarrow +\infty$ all'infinito o allo zero. Supporremo per il momento $A(x)$ continua e > 0 per $x \geq x_0$; l'ipotesi della continuità non è però essenziale, come sarà accennato al n. 5.

(¹) Debbo infatti l'incitamento alla presente ricerca, e alla sua pubblicazione, al collega prof. F. TRICOMI, in occasione di una nuova edizione del suo volume «*Equazioni differenziali*» (Torino, Einaudi), attualmente in corso di stampa. In esso l'A. ha voluto gentilmente includere, con lievi varianti, i nn. 1, 2, 3 della presente Nota.

a) Si assumano come condizioni iniziali per $x = x_0$: $y = y_0 > 0$, $y' = y_0' > 0$. Da

$$\frac{d}{dx}(yy') = y'^2 + Ay^2$$

segue allora che yy' cresce sempre, quindi, per $x > x_0$, $yy' > y_0y_0' > 0$, onde y e y' hanno segno costante, ed anzi positivo; poi che y cresce, ed anche y' , essendo $y'' = Ay > 0$. E avendosi allora $y' > y_0'$ risulta:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x y'(\xi) d\xi > y_0 + y_0'(x - x_0)$$

e quindi y diverge per $x \rightarrow \infty$, ed anzi almeno del 1° ordine.

b) Dalle considerazioni che precedono risulta che y' tende per $x \rightarrow \infty$ ad un limite, finito o infinito. È noto (2) che avviene il secondo caso se $A(x)$ ha integrale divergente per $x \rightarrow \infty$. In realtà è sufficiente che sia

$$\int_{x_0}^x \xi A(\xi) d\xi = +\infty.$$

Difatti si ha, per $a \geq x_0$, $a > 0$,

$$y' = y'(a) + \int_a^x A(\xi)y(\xi)d\xi = y'(a) + \int_a^x \xi A(\xi) \frac{y(\xi)}{\xi} d\xi,$$

e poichè è $y(\xi)/\xi > m > 0$ segue l'asserto.

c) Ci porremo ora senz'altro nell'ipotesi che esista un integrale y , che diremo di tipo I, che diverge per $x \rightarrow \infty$ insieme alla sua derivata. Si dimostra allora subito che per ogni punto (a, b) , con a abbastanza grande, passa una ed una sola linea integrale lungo la quale funzione e derivata tendono a zero. Diremo una tale soluzione di tipo II.

Detto infatti z un integrale di tipo II, e supposto y di segno costante per $x \geq a$, dalla formula di Liouville si ha, per un opportuno valore di C .

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{z}{y} \right) = \frac{C}{y^2}$$

(2) Cfr. SANSONE (G.), *Equazioni differenziali nel campo reale*, II, (Bologna, 1941) p. 43. Si troverà qui, quasi per intero, il contenuto di a), b), c), in forma un po' meno semplice, ma più completa.

e di qui, notando che il secondo membro è $O(1/x^2)$ per $x \rightarrow \infty$,

$$\frac{z}{y} = -C \int_x^\infty \frac{d\xi}{y^2(\xi)}, \quad z = -Cy \int_x^\infty \frac{d\xi}{y^2(\xi)}.$$

Il valore di C si determina in modo unico mediante le circostanze iniziali, onde l'integrale, se esiste, è unico.

Viceversa, con tale scelta di C , z risulta un integrale di (1) che risponde alle condizioni richieste. Basta occuparci del comportamento di z e z' per $x \rightarrow \infty$; ora si ha, per la regola di L' Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} z &= -C \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_x^\infty \frac{d\xi}{y^2(\xi)} : \frac{1}{y} \right) = \\ &= -C \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y^2} : \frac{y'}{y^2} \right) = -C \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{y} = 0. \end{aligned}$$

Risulta poi che z ha segno costante; supposto, per esempio, $z > 0$, dalla (1) si ha $z' > 0$, quindi z' crescente e avente limite determinato per $x \rightarrow \infty$. Ed esso è necessariamente zero, ché in ogni altro caso z divergerebbe. Ne segue anche che è $z' < 0$; o, in generale, $zz' < 0$.

d) Possiamo dimostrare ora che: *posto*

$$\sigma = \int_a^x \sqrt{A(\xi)} d\xi, \quad \tau = \int_a^x \frac{1 + A(\xi)}{2} d\xi,$$

yy' diviene infinito di ordine non inferiore ad $e^{2\sigma}$, $y^2 + y'^2$ di ordine non superiore ad $e^{2\tau}$; zz' diviene infinitesimo di ordine non inferiore ad $e^{-2\sigma}$, $z^2 + z'^2$ di ordine non superiore ad $e^{-2\tau}$.

Se si pone infatti $U = yy'$, si ha, per una nota disuguaglianza,

$$U' = y'^2 + yy'' = y'^2 + Ay^2 \geq 2\sqrt{A}yy' = 2U\sigma',$$

da cui

$$e^{-2\sigma}U' - 2\sigma'e^{-2\sigma}U \geq 0, \quad \frac{d}{dx}(e^{-2\sigma}U) \geq 0.$$

Ne segue che la funzione positiva $e^{-2\sigma}U$ non decresce mai: essa ha dunque un limite determinato positivo, C_1 , finito o infinito; e ciò dimostra la prima parte della tesi.

Ponendo invece $V = y^2 + y'^2$ si ha, per la stessa disuguaglianza,

$$V' = 2yy' + 2y'y'' = 2(1 + A)yy' = 4\tau'yy' \leq 2\tau'(y^2 + y'^2) = 2\tau'V$$

da cui

$$e^{-2\tau} V' - 2\tau' e^{-2\tau} V \leq 0, \quad \frac{d}{dx} (e^{-2\tau} V) \leq 0.$$

Perciò la funzione positiva $e^{-2\tau} V$ non cresce mai; essa ha dunque un limite determinato e finito, positivo o nullo, C_2 . È con ciò stabilito il secondo punto della tesi; dimostrazioni analoghe si hanno per le altre due osservazioni, tenendo conto che z e z' hanno segni opposti.

2. Passando ora ad ipotesi più restrittive, *supporremo (ipotesi A.) che $A(x)$ tenda ad 1 per $x \rightarrow \infty$* . È chiaro che sono soddisfatte le condizioni (n° 1, a) affinché esistano gli integrali y e z dei tipi I e II. Si ha inoltre (3):

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y'}{y} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{z'}{z} = -1.$$

Infatti, per la regola di L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y'^2}{y^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2y'y''}{2yy'} = \lim_{x \rightarrow \infty} A = 1$$

e così per z ; tenuto conto dei segni di y'/y e di z'/z segue l'asserto.

b) *Esiste finito il limite di yz per $x \rightarrow \infty$* .

Da a) segue infatti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{y'}{y} - \frac{z'}{z} \right) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y'z - yz'}{yz} = 2$$

e di qui, essendo, per il teorema di Liouville, $y'z - yz'$ una costante non nulla, segue la tesi (4).

Con ciò, nell'ipotesi posta, lo studio asintotico di z è ridotto a quello di y .

(3) È questa un'applicazione di un teorema generale di PERRON [4]. Una condizione necessaria e sufficiente perchè esista un integrale di (1) tale che $y'/y \rightarrow 1$ è stata data da HARTMAN [2]. Posto $A = 1 + \eta$ essa può scriversi

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_1}^{x_2} \eta dx}{1 + |x_2 - x_1|} = 0;$$

la sua necessità si prova facilmente, mentre assai più riposta sembra la sufficienza.

(4) Per un'altra dimostrazione, pure assai semplice, v. HARTMAN [2], p. 573.

3. Aggiungiamo (ipotesi B) all'ipotesi A quella che, posto $A = 1 + \eta$, sia

$$\int_0^{\infty} |\eta|^p dx < +\infty \quad 0 < p \leq 2.$$

Diciamo allora che $e^{2\sigma}$ ed $e^{2\tau}$ sono infiniti dello stesso ordine; basterà provare per questo che $\tau - \sigma$ ha limite finito.

Si ha difatti

$$\tau - \sigma = \frac{1 + A}{2} - \sqrt{A} = 1 + \frac{\eta}{2} - \sqrt{1 + \eta} = O(\eta^2) \quad \text{per } \eta \rightarrow 0,$$

e a fortiori $O(\eta^p)$ per $0 < p \leq 2$. Integrando tra 0 e x ne segue l'asserto.

Se allora si osserva che, in virtù di 2, a), yy' e $y^2 + y'^2$ hanno lo stesso ordine, e si ricordano i risultati del n. 1, d), si vede che yy' è dell'ordine di $e^{2\sigma}$ e di $e^{2\tau}$, e di qui, avendosi

$$y^2 = yy' \frac{y'}{y}, \quad y'^2 = yy' \frac{y'}{y}$$

segue che y e y' sono infiniti dell'ordine di e^σ e di e^τ . Precisamente

$$\lim \frac{y}{e^\sigma} = \lim \frac{y}{e^\tau} = \lim \frac{y'}{e^\sigma} = \lim \frac{y'}{e^\tau} = \gamma$$

con γ finito e diverso da zero.

È notevole il caso $p=1$; si vedrà subito che τ e σ possono allora sostituirsi con x , onde $y \sim y' \sim \gamma e^x$; risultato ottenuto da molti Autori, ma che deve attribuirsi a BÔCHER.

4. a) Meno semplici si presentano le cose quando si prescinda dall'ipotesi $\eta \rightarrow 0$, ponendo invece l'altra (ipotesi C)

$$\int_a^{\infty} |\eta|^p dx < +\infty \quad 1 \leq p \leq 2,$$

in quanto non riesce allora immediata la dimostrazione di 2, a).

Si può anzitutto osservare che tale ipotesi garantisce ancora l'esistenza degli integrali y , z dei rispettivi tipi I e II. È infatti, per la disuguaglianza di Schwarz-Hölder, per $p > 1$,

$$\left| \int_a^x \eta d\xi \right| = \left| \int_a^x 1 \cdot \eta d\xi \right| \leq (x-a)^{1-1/p} \left(\int_a^x |\eta|^p dx \right)^{1/p} = o(x),$$

il risultato valendo poi anche per $p = 1$. Ne segue

$$\int_a^x A(\xi) d\xi = x - a + o(x)$$

che diverge per $x \rightarrow \infty$.

Ciò posto, si può dimostrare anche qui che $e^{2\sigma}$ e $e^{2\tau}$ divergono infiniti dello stesso ordine, ossia che $\tau - \sigma$ tende ad un limite finito. Si ha infatti, per $|\eta| < 1$:

$$0 \leq 1 + \frac{\eta}{2} - \sqrt{1 + \eta} = \frac{\eta^2}{4\left(1 + \frac{\eta}{2} + \sqrt{1 + \eta}\right)} < \frac{\eta^2}{2} \leq \frac{|\eta|^p}{2}$$

e per $\eta \geq 1$

$$0 \leq 1 + \frac{\eta}{2} - \sqrt{1 + \eta} \leq \frac{\eta}{2} \leq \frac{|\eta|^p}{2}$$

onde $\tau' - \sigma'$ è integrabile tra a e $+\infty$.

Da ciò segue ora, tenuto conto di 1, d , che yy' e $y^2 + y'^2$ hanno lo stesso ordine, che è quello di $e^{2\sigma}$ e di $e^{2\tau}$. Se infatti $yy'e^{-\sigma}$, e quindi $2yy'e^{-2\sigma}$ tendessero all'infinito, ciò avverrebbe a fortiori per $(y^2 + y'^2)e^{-2\sigma}$ e per $(y^2 + y'^2)e^{-2\tau}$, in contraddizione col citato teorema. E nello stesso modo $(y^2 + y'^2)e^{-2\tau}$ non può tendere a zero.

Esiste dunque finito il

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y^2 + y'^2}{yy'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{y'} + \frac{y'}{y} \right) = m$$

e di qui risulta subito, per la continuità di y'/y , che y'/y ha un limite finito e non nullo λ , soddisfacente a $\lambda + 1/\lambda = m$.

Dopo di che, come al n. 3, si conclude che y e y' *divengono infiniti dell'ordine di e^σ ed e^τ* (5).

b) A completamento del risultato precedente si proverà che si ha ancora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y'}{y} = 1.$$

Essendo infatti come si è ora visto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{e^\tau} = \gamma \neq 0$$

(5) Cfr. HARTMAN [2], p. 575, ove si dà la formula $y \sim Ce^\tau$. Per il caso $p = 3$ v. BELLMAN [1] e quanto è detto nell'introduzione.

segue

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log y - \tau) = \log \gamma, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\log y}{x} - \frac{\tau}{x} \right) = 0.$$

Ma, per la regola di L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y'}{xy} = m$$

mentre è poi, come risulta da a)

$$\tau = \int \frac{1+A}{2} d\xi = \frac{1}{2}(2x - a + o(x)) = x + o(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tau}{x} = 1.$$

È dunque $m = 1$, come si voleva.

Anche qui, per $p = 1$, si ritrova il risultato di BÔCHER.

5. Dai ragionamenti precedenti si può senza difficoltà rimuovere l'ipotesi della continuità di A , sostituendo a relazioni contenenti derivate quelle che, nel caso della continuità di A , se ne dedurrebbero per integrazione. Vale la pena, al più, di fermarsi un momento sulla deduzione di 2, a) per la quale si scriverà;

$$\frac{y^2(x) - y^2(a)}{y^2(x) - y^2(a)} = \frac{\int_a^x y(\xi)y'(\xi)A(\xi)d\xi}{\int_a^x y(\xi)y'(\xi)d\xi}, \quad \frac{z^2(x)}{z^2(x)} = \frac{\int_x^\infty z(\xi)z'(\xi)A(\xi)d\xi}{\int_x^\infty z(\xi)z'(\xi)d\xi}$$

e si applicherà poi un facile analogo del teorema di L'Hôpital (che nei casi più comuni gli è anzi equivalente).

6. Un caso di tipo molto diverso dai precedenti si ha nell'ipotesi D: $A(x)$ è la somma di una funzione $B(x) > 0$ a variazione limitata tra a e $+\infty$, tendente ad 1 per $x \rightarrow \infty$, e di una $C(x)$ assolutamente integrabile tra a e $+\infty$.

Modificando opportunamente lo spezzamento di A ci si può ridurre al caso in cui $B(x)$ sia assolutamente continua. Posto allora $B = \beta^2$, consideriamo la funzione ausiliaria (6):

$$W = \log(\beta y + y') - \int_a^x \beta d\xi.$$

(6) Il metodo qui usato è un adattamento di quello della mia Nota: *Sopra un caso di stabilità per l'equazione differenziale $y'' + A(x)y = 0$* (Annali di Mat., (8), 26 (1948), 199-206). Il risultato è di WINTNER [5] nel caso $C = 0$; altrimenti esso rientra in un teorema generale di LEVINSON [3].

Eguagliando $W(x) - W(a)$ all'integrale della sua derivata e tenendo conto della (1):

$$y'' = (\beta^2 + C)y$$

si trova

$$W(x) = W(a) + \int_a^x \frac{(\beta^2 + C)y}{\beta y + y'} d\xi.$$

Ora la funzione integranda è maggiorata da

$$\frac{(|\beta'| + |C|)y}{\beta y} = \frac{|\beta'|}{\beta} + \frac{|C|}{\beta}$$

dove, per le ipotesi poste, i due termini sono assolutamente integrabili tra a e $+\infty$. Ne viene che W tende per $x \rightarrow \infty$ a un limite finito e quindi, posto

$$\int_a^x \beta d\xi = \sigma_1$$

è

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [(\beta y + y')e^{-\sigma_1}] = \gamma \text{ finito e non nullo.}$$

e quindi anche

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\beta y + y')e^{\sigma_1}}{2\beta e^{2\sigma_1}} = \frac{\gamma}{2}.$$

Ora i due termini della frazione sono le derivate di ye^{σ_1} e $e^{2\sigma_1}$; la regola di L'Hôpital generalizzata (n. 5) dà quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ye^{\sigma_1}}{e^{2\sigma_1}} = \frac{\gamma}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{\sigma_1}} = \frac{\gamma}{2}$$

che ci dà la forma asintotica di y . In essa σ_1 può essere sostituito con σ ; infatti

$$|\sqrt{A} - \beta| = \left| \frac{A - \beta^2}{\sqrt{A} + \beta} \right| < \frac{|C|}{\beta}$$

è integrabile tra a e $+\infty$; onde $\sigma - \sigma_1$ ha limite finito.

Dalla (2) risulta allora subito che è anche

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y'}{e^{\sigma_1}} = \frac{\gamma}{2}$$

e che quindi y'/y tende ad 1. Concludendo, nell'ipotesi D y e y' sono tra loro asintotici e dell'ordine di e^σ .

Come osserva WINTNER, non si può qui, in generale, sostituire σ con τ , potendosi formare facilmente esempi in cui $\tau - \sigma$ non ha limite finito. Basta per esempio assumere $A = 1 + x^{-\alpha}$, con $0 < \alpha \leq 1/2$; l'integrale di η^2 è qui divergente, onde $ye^{-\tau}$ tende a 0.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BELLMAN (R.), *On the asymptotic behavior of solutions of $u'' - (1 + f(t))u = 0$* , « Annali di Mat. », (4), 31 (1950), 83-91.
- [2] HARTMAN (P.), *Unrestricted solutions fields of almost separable differential equations* « Trans. Amer. Math. Soc. », 63 (1948), 560-580.
- [3] LEVINSON (N.), *The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations*, « Duke Math. Journ. », 15 (1948), 111-120.
- [4] PERRON (O.), *Über lineare Differentialgleichungen bei denen die abhängige Variabel reel ist*, « Journ. f. reine u. ang. Math. », 142 (1913), 254-270.
- [5] WINTNER (A.), *Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator in its hyperbolic range* « Duke Math. Journ. », 15 (1948) p. 60.