Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco G. Tricomi

# Determinazione dei limiti per $n \to \infty$ degli estremi relativi dell'$n^{\text{esimo}}$ polinomio di Legendre.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **8** (1953), n.2, p. 107–109.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_107_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

# SEZIONE SCIENTIFICA

## BREVI NOTE

### Determinazione dei limiti per $n \to \infty$ degli estremi relativi dell'$n^{esimo}$ polinomio di Legendre.

Nota di FRANCESCO G. TRICOMI (a Torino).

**Sunto.** - *Si dimostra che i limiti indicati nel titolo coincidono coi i primi estremi relativi di* $J_0(z)$, *cioè coi valori di questa funzione nei primi zeri di* $J_1(z)$.

**1.** In una Nota recentemente apparsa in questo *Bollettino* [1] G. VILLARI dimostra che, se si indicano con $\mu_{1,n}, \mu_{2,n}, \dots, \mu_{n-1,n}$ i valori assoluti dei sucessivi estremi (massimi o minimi) dell'$n^{esimo}$ polinomio di LEGENDRE $P_n(x)$ allorchè si percorre in verso ***negativo*** l'intervallo fondamentale $(-1, 1)$, per $r$ fisso, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \mu_{r,n} = h_r > 0 \tag{1}$$

e, in particolare, che è

$$h_1 > 0{,}39983, \qquad h_2 > 0{,}29408. \tag{2}$$

Scopo della presente, brevissima Nota è di far presente come, sfruttando molto parzialmente i risultati ottenuti in un mio precedente lavoro [2], sia possibile determinare esplicitamente $h_r$.

[1] Vol. (3) **7** (1952), p. 421-423.

[2] F. G. TRICOMI. *Expansion of the Hypergeometric Function in Series of Confluent Ones and Application to the Jacobi Polynominals,* Comm. Math. Helvetici **25** (1951), 196-204.

Precisamente si trova che

$$h_r = |J_0(j_{1,r})|, \tag{3}$$

avendo indicato con $j_{1,r}$ l'$r^{esimo}$ zero (a partire dall'origine) della funzione di BESSEL $J_1(z)$. In particolare risulta

$$h_1 = 0{,}4028 \quad , \quad h_2 = 0{,}3001 \tag{4}$$

d'accordo con le (2).

**2.** Occorre anzitutto determinare (asintoticamente) le ascisse in cui si verificano gli estremi di $P_n(x)$, cioè, servendosi di classiche notazioni, gli zeri di

$$\frac{d}{dx}P_n(x) = C_{n-1}^{(3/2)}(x) = \frac{n+1}{2}P_{n-1}^{(1,1)}(x)$$

che, usando le stesse notazioni di VILLARI, indicheremo $\alpha_{r,n}$, $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ essendo

$$1 > \alpha_{1,n} > \alpha_{2,n} > \ldots > \alpha_{n-1,n} > -1.$$

Nel mio lavoro cit. si trova una formula: la (25) che, unitamente alla (21), permette di determinare gli « ultimi » zeri di $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e meno di un resto dell'ordine di $n^{-6}$. Qui basta però tener conto del solo primo termine della (25) che essendo ora $\alpha = \beta = 1$ ed $n$ cambiato in $n-1$, fornisce immediatamente (per $r$ fisso)

$$\alpha_{r,n} = 1 - \frac{j^2_{1,r}}{2n^2} + O(n^{-4}). \tag{5}$$

**3.** Per calcolare il valore $\pm\mu_{r,n}$ di $P_n(x)$ corrispondente ad $x = \alpha_{r,n}$ occorre servirsi anche della (29) del mio lavoro cit. che, limitata al solo suo primo termine, assume l'aspetto

$$P_n(x) = \left(\frac{4}{x+3}\right)^{n+1} e^{-\xi/(2n+1)}[J_0(2\sqrt{\xi}) + O(n^{-2})], \quad \xi = \frac{(2n+1)^2}{2}\,\frac{1-x}{3+x}. \tag{6}$$

Per $x = \alpha_{r,n}$, in forza della (5), risulta

$$\frac{\xi}{2n+1} = \frac{j^2_{1,r}}{8n^2}\left[n + \frac{1}{2} + O(n^{-1})\right] \tag{7}$$

mentre, d'altro lato, si ha

$$\log\frac{4}{x+3} = \frac{j^2_{1,r}}{8n^2}[1 + O(n^{-2})].$$

Pertanto possiamo scrivere che

$$\left(\frac{4}{x+3}\right)^{n+1} e^{-\xi/(2n+1)} =$$

$$= \exp\left\{\frac{j^2_{1,\,r}}{8n^2}\left[n+1-n-\frac{1}{2}+O(n^{-1})\right]\right\} = \exp\left\{\frac{j^2_{1,\,r}}{16n^2}\left[1+O(n^{-1})\right]\right\}$$

e ce n'è molto più di quanto occorra per concludere che la precedente espressione tende a 1 per $n \to \infty$. Ma, d'altra parte, dalla (7) si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} \xi = \lim_{n\to\infty} \frac{j^2_{1,\,r}}{4}\left[\left(\frac{n+1/2}{n}\right)^2 + O(n^{-2})\right] = \frac{j^2_{1,\,r}}{4}:$$

dunque dalla (6) può desumersi che

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\alpha_{r,\,n}) = J_0(j_{1,\,r}) \tag{8}$$

cioè che

$$h_r = \lim_{n\to\infty} |P_n(\alpha_{r,\,n})| = |J_0(j_{1,\,r})| \tag{9}$$

come volevasi dimostrare.

Si noti infine che riferendosi alla (8) invece che alla (9) si avrà il vantaggio di poter decidere se l'estremo di $P_n(x)$ che si considera è un massimo ($J_0 > 0$) oppure un minimo ($J_0 < 0$).