Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

- * T. Levi-Civita, U. Amaldi, Lezioni di Meccanica razionale, Zanichelli, Bologna, 1950-1952 (Carlo Cattaneo)
- * G. Ascoli, Trasformata di Laplace, Gheroni, Torino, 1951 (Giovanni Zin)
- * Lucien Godeaux, Le trasformations birationelles du plan, Gauthier-Villars, Paris, 1953 (Mario Villa)
- * H. Kober, Dictionary of Conformal Representation, Dover Publ., New York, 1952 (Francesco G. Tricomi)
- * F. Lösch - F. Schoblik, Die Facultät (Gammafunction) und verwandte Funktionen, Teubner, Leipzig, 1951 (Giuseppe Belardinelli)
- * L. Bieberbach, Einführung in die Funktionentheorie, II ed, Verlag für Wissenschaft und Fachbuch, Bielefeld, 1952 (Giuseppe Belardinelli)
- * Karl Menger, Calculus – A Modern Approach, Illinois Institute of Technology, Chicago (Giovanni Sansone)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 83–93.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_83_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

RECENSIONI

T. Levi-Civita e U. Amaldi: *Lezioni di Meccanica razionale*, Zanichelli, Bologna, 1950-1952, pp. XVIII + 816, IX + 510, IX + 671.

Un avvenimento librario di alto rilievo si è avuto recentemente con la nuova edizione del Trattato di Meccanica razionale di Tullio Levi-Civita e di Ugo Amaldi. L'opera, di oltre duemila pagine, è divisa in due volumi, il secondo spezzato a sua volta in due parti. Ciascun tomo è corredato, oltre che dall'indice generale, da un elenco alfabetico dei nomi e da un particolareggiato indice analitico. La stampa, dignitosissima, è stata curata, come nelle precedenti edizioni, dalla Casa Zanichelli di Bologna.

Ciascuno di noi, cultori italiani di Meccanica, dopo i primi rudimenti appresi nelle aule universitarie, ha formato la propria cultura specifica principalmente sul Trattato che oggi rivede la luce: cosicchè può a buon diritto dirsi che tutti i Meccanici italiani viventi siano, direttamente o no, allievi del Levi-Civita e dell'Amaldi; e per essi il Trattato è sempre lì pronto — vero *livre de chevet* — per una occasionale consultazione o per una riposata lettura.

« Certo non abbiamo — dichiarano gli Autori nella prefazione alla prima edizione — l'assurda presunzione di fornire tutto a tutti ». Tuttavia raramente un libro ha, come questo, unito in sè il carattere di opera di consultazione con l'armonia dell'insieme: un libro di cui si possono leggere con vero diletto, scientifico e letterario, più capitoli continuati senza saltare una pagina, e che si può all'occorrenza aprire in un punto determinato riuscendo a orientarsi rapidamente. Raramente un libro ha avvicinato con maggior gusto argomenti applicativi a questioni squisitamente speculative o ha più spontaneamente accostato considerazioni di critica logica ad intuizioni proprie della Scienza induttiva. Raramente un libro ha con più garbo, ma senza timori di inquinamenti, alternato ragionamenti sintetici e procedimenti analitici.

L'opera ha, nel suo complesso, carattere molto elevato e fortemente concettuale, giungendo a svolgere questioni di grande complessità o di estrema sottigliezza, ma l'esposizione è sempre piana, graduale, così che dalle prime nozioni elementari di Calcolo vettoriale o di Cinematica, accessibili allo studente in possesso dei primissimi elementi dell'Analisi, si è portati quasi insensibilmente alle questioni più elevate della Meccanica analitica, che non tanto una più profonda preparazione matematica quanto una vera maturità di pensiero permette di penetrare compiutamente.

Il Trattato non ha avuto, nella nuova edizione, che piccoli mutamenti e poche aggiunte: ciò per lo scrupolo sentito dal Prof. Amaldi di « limitarsi a quei ritocchi » che egli « poteva presumere sarebbero stati voluti o accettati » dall'Autore scomparso. Ma l'opera è fresca come fosse stata concepita oggi e, con le piccole aggiunte che le successive edizioni le hanno apportato, è come poche atta — nel tempo che essa fornisce le cognizioni del più classico e più elaborato capitolo della Fisica — a condurre il lettore alla soglia delle moderne teorie fisiche o dei vasti domini della Tecnica.

Tenteremo ora di dare un cenno, necessariamente incompleto, degli argomenti trattati, sforzandoci possibilmente di seguire il filo che in tanta mole e disparità di materia non viene mai spezzato e che dà all'opera la mirabile unità di insieme che non è la sua più piccola dote. Anzitutto un'esauriente preparazione del linguaggio che verrà costantemente usato in tutta l'opera: il linguaggio vettoriale; ma un linguaggio sobrio, limitato alla parte che veramente consente, opportunamente alternata col linguaggio cartesiano, una economia di pensiero. Di seguito, separata dal resto della Meccanica, secondo l'uso tradizionale dopo la critica filosofica dell'Ampère, la Cinematica: cinematica del punto e dei sistemi rigidi, solidi e piani; teoria dei moti relativi; nonchè cinematica dei sistemi generali, olonomi o soggetti a vincoli di mobilità. È qui introdotta — per la prima volta, io credo — principalmente onde chiarire per contrasto il concetto di spostamento *virtuale,* la definizione di spostamento *possibile.* La trattazione generale dei moti rigidi è svolta per via prevalentemente analitica, ma l'uso appropriato dei principi dei moti relativi consente di raggiungere per via sintetica alcuni dei risultati più espressivi. Particolare sviluppo è dato, in vista delle applicazioni tecniche, ai moti rigidi piani.

All'esame puramente descrittivo del moto, segue, nel Cap. VII, l'indagine sulle relazioni causali del moto, sintetizzate nella proporzionalità del vettore forza al vettore accelerazione, coefficiente la massa. A questa si giunge in modo convincente, perchè naturale e aderente al processo storico, partendo dal caso particolare del moto dei gravi ed estrapolando, anche in virtù di considerazioni antropomorfiche, a moti qualunque. Ne conseguono l'impostazione generale del problema dinamico per il punto materiale, libero o vincolato e, nel seguente Cap. VIII, le relazioni fondamentali tra i più importanti concetti meccanici derivati (lavoro, forza viva, quantità di moto, impulso ecc.). Chiudono il Cap. VIII, ancora in piena generalità, le principali nozioni sulla omogeneità delle formule e le più importanti regole della similitudine meccanica.

Introdotti in tal modo tutti i concetti e i postulati fondamentali dell'intera Meccanica (salvo il principio di reazione che verrà introdotto un po' più avanti) e stabilito come in linea concettuale la Statica e la Dinamica siano subordinate agli stessi principî, il volume continua, seguendo le esposizioni tradizionali e rispettando l'ordine storico, con la Statica. Nel Cap. IX, subordinata logicamente ai principi generali precedentemente introdotti, è trattata la statica del punto, in assenza o in presenza di attrito. Dopo un diffuso capitolo sulla teoria dei baricentri e dei momenti di inerzia, premessa alla meccanica dei sistemi, ed un breve compendio di nozioni, non tutte elementari, della teoria newtoniana dell'attrazione, il Cap. XII giunge a formulare, sulla base del principio di reazione aggiunto alle leggi fondamentali in precedenza acquisite, e della distinzione tra forze interne ed esterne, quelle condizioni *necessarie* all'equilibrio di un qualunque sistema materiale che sono le *equazioni cardinali della Statica.* Alla loro formulazione segue, più specifica, la statica dei solidi (Cap. XIII) la quale tuttavia, a differenza della statica del punto. non può svilupparsi, ove non si voglia subordinarla alla dinamica, senza l'introduzione di un ulteriore postulato caratteristico, del resto di evidenza immediata. Limpidamente chiarito è, nei Cap. IX e XIII, il significato di una eventuale indeterminazione locale delle reazioni vincolari, come conseguenza di una inadeguatezza dello schema di perfetta rigidità. Segue, nel Cap. XIV, la Statica dei sistemi articolati che all'interesse professionale per gli ingegneri associa l'eleganza di elevati metodi geometrici (Cremona), nonchè sottili considerazioni algebriche in relazione alla condizione di stretta indeformabilità di una struttura reticolare; poi la Statica dei fili, con la trattazione dei più classici problemi, e infine la Statica delle verghe.

Il Cap. XV è dedicato a quella meravigliosa sintesi di tutta la Statica — secolare fatica dell'ingegno umano — che è il *Principio dei lavori virtuali.* Il vero contenuto concettuale del principio, e che gli dà diritto a tal nome, non sta, secondo il Levi-Civita e l'Amaldi, nell'enunciato finale, nella regola statica universale dei sistemi privi di attrito dalla quale è scomparsa, quasi prodigiosamente, ogni traccia delle incognite reazioni vincolari, ma nella proprietà comune a tutti i vincoli privi di attrito che quella regola prepara. È per tal motivo che — per la prima volta, io credo, nella trattatistica — non alla regola statica ma alla proprietà delle reazioni vincolari viene attribuita la qualifica di Principio dei lavori virtuali. Accettata quest'ultima, la regola universale di equilibrio, alla cui espressione matematica viene qui dato il nome di *Relazione simbolica della Statica,* ne discende in modo logico, se pur non privo di insidie. Dopo varie applicazioni concrete della regola e dei suoi corollari, essa viene compiutamente sfruttata, seguendo la classica trattazione lagrangiana, sia a stabilire le condizioni di equilibrio di un qualunque sistema olonomo, sia al calcolo dei contributi reattivi dei singoli vincoli. Chiude il primo volume un capitolo sulla statica relativa con applicazioni di indole tecnica e geodetica.

Il secondo volume dell'opera, concerne la Dinamica. Si inizia con l'impostazione sistematica del problema dinamico di un punto su traiettoria prestabilita e, discusso in generale il suo moto nel caso di sollecitazione posizionale (secondo lo Weierstrass), tratta diffusamente molti problemi specifici. La dinamica del punto su superficie prestabilita, svolta secondo i canoni lagrangiani, e del punto libero formano oggetto del capitolo seguente. Speciale risalto viene dato alla nozione dinamica di stabilità dell'equilibrio e al relativo criterio del Dirichlet. Tra i più cospicui esempi di dinamica del punto libero viene trattato il *problema dei due corpi* che, insieme con molte altre questioni di Meccanica celeste, forma l'argomento del Cap. III.

Si passa poi a stabilire, nei Cap. IV e V, i teoremi generali della Dinamica dei sistemi: *le equazioni cardinali del moto, il teorema delle forze vive, gli integrali primi tipici del moto.* Larga copia di esempi espressivi e una adeguata illustrazione danno rilievo fisico ai risultati. Subito dopo, sfruttando ancora una volta il principio generale di comportamento dei vincoli privi di attrito, viene stabilita la *Relazione simbolica della Dinamica,* sintesi concettuale di tutta la Meccanica dei sistemi privi di attrito, dalla quale, nella duplice impostazione lagrangiana (a parametri sovrabbondanti o a parametri essenziali) discende l'impostazione del problema dinamico per un qualunque sistema olonomo. Le proprietà delle *equazioni del Lagrange,* la cui generalità e potenza ci lasciano ancor oggi attoniti, vengono poi estese ai sistemi lagrangiani generali, aprendo l'adito ad estensioni ad altri campi della Fisica, mentre anche l'impostazione del problema del moto dei sistemi anolonomi viene risolto mediante le *equazioni del Maggi* e dell'*Appell*.

Nel Cap. VI viene ripresa, per un generico sistema olonomo, la nozione dinamica di stabilità dell'equilibrio e viene esteso, con elegantissima dimostrazione, il criterio del Dirichlet. La nozione di stabilità, dopo un esauriente studio delle piccole oscillazioni di un sistema, viene estesa alle soluzioni di un generico sistema differenziale, ponendo in evidenza come, in mancanza di più sicuri criteri di stabilità, soccorra generalmente il criterio delle *piccole oscillazioni,* capace del resto di dare, in certi casi, un sicuro criterio di instabilità. Viene poi esaminata l'influenza sulla stabilità (ordinaria o secolare) di azioni dissipative o girostatiche.

Non è possibile, nell'esame dei tre seguenti capitoli dedicati alla Dinamica del corpo rigido, fondata essenzialmente sulle equazioni cardinali e su quelle che sono la traduzione scalare più efficace della seconda di esse — *le Equazioni dinamiche di Eulero* — anche la semplice elencazione dei problemi trattati. Ci limiteremo a dire come, risolti o comunque esaurientemente discussi nel Cap. VII alcuni problemi abbastanza elementari, prevalentemente piani, venga a fondo trattato, nel Cap. VIII, il problema classico ed estremamente complesso, nella sua generalità, del solido con un punto fisso: spiegazione qualitativa dei fenomeni giroscopici, moti per inerzia, moto del solido pesante nei vari casi di integrabilità completa (Lagrange-Poisson, Kovalevskij) e questioni di stabilità connesse, sono trattati con vera completezza; speciale riguardo è stato dato ad alcune importanti categorie di soluzioni particolari, come ad esempio le rotazioni dello Staude. Vengono considerati altresì alcuni casi classici di integrabilità parziale (Hess, Tshapliguine) nonchè il recente notevole risultato del Grioli. Altri, anche molto complessi, problemi di Dinamica dei solidi, soggetti a vincoli di rotolamento o dotati di moti interni, vengono trattati nel Cap. IX.

Possiamo appena accennare, per non rischiare di perderci nella complessità degli argomenti, alla limpida e armoniosa trattazione (Cap. X e XI) di quella parte della Meccanica analitica che, legata ai grandi nomi di Gauss, Jacobi, Hamilton, Poisson, Liouville, Poincaré, Hertz, Routh, Helmoltz, Klein, Lie, Levi-Civita, è inerente sia alla riduzione dei sistemi lagrangiani alla forma canonica e alla incomparabile teoria che ne segue (con riflessi grandiosi nella Meccanica celeste, nella Meccanica statistica, nella teoria della propagazione ondosa e in tutta la Fisica) sia alla formulazione di quei « Principii » generali della Meccanica (della minima costrizione, della direttissima, dello Hamilton, dell'azione stazionaria, e loro generalizzazioni) che tanta luce hanno proiettato sulla intima costituzione delle leggi dinamiche e tanto vasti orizzonti hanno aperto alla pura ricerca matematica come alla più alta speculazione fisica, gettando il seme, attraverso analogie ottico-meccaniche, della formulazione ondulatoria della Fisica del microcosmo.

L'opera si conclude con un capitolo di Dinamica impulsiva ove, accanto ai teoremi generali del Robin, del Thomson, del Carnot, di Lagrange-Bertrand, del Volterra, e alla risoluzione del problema impulsivo per un generico sistema olonomo, trova posto la teoria generale dell'urto, anche con riguardo all'attrito.

Questo, nella sua arida elencazione, il contenuto del Trattato; attorno a tale ossatura una dovizia senza pari di risultati, armonicamente collegati. Molti complementi, che rischierebbero di turbare, per il loro carattere collaterale o frammentario, l'armonia dell'insieme, vengono esposti in forma autonoma negli « Esercizi » che, numerosi e altrettanto curati che il testo, seguono ogni capitolo. Un'ultima parola per ricordare le interessanti note biografiche che completano da un punto di vista storico il valore dell'opera.

« La ristampa di queste *Lezioni* — dichiara nobilmente il Prof. Amaldi nella prefazione alla nuova edizione — vuole essere un omaggio alla memoria di Tullio Levi-Civita, spentosi in Roma il 29 dicembre 1941 ». A tale omaggio si associano, reverenti e commossi, tutti i Matematici e tutti i Fisici d'Italia, che accomunano i due Autori in un profondo sentimento di gratitudine per la loro immane fatica che ha consentito che tante idee originali, tanto sforzo di sintesi, diventassero patrimonio di tutti.

CARLO CATTANEO

G. ASCOLI: *Trasformazione di Laplace* - (Torino, Gheroni, 1951), pp. 256, L. 1500.

Il volume raccoglie la parte monografica del corso di Analisi Superiore tenuto dall'A. nell'anno accademico 1950-51 presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Torino. Perciò il carattere dell'opera è eminentemente didattico e la trattazione della materia è adattata al livello culturale degli studenti del 2° biennio. La trasformazione di Laplace viene limitata alle funzioni di variabile reale che sono continue a tratti e che l'A. chiama della classe (C'), ciò che rende compatibile il tono elementare dell'esposizione con la possibilità di applicazione della teoria alle questioni più frequenti.

La trattazione ha inizio con un capitolo introduttivo nel quale vengono richiamate nozioni varie di calcolo infinitesimale, di teoria delle funzioni analitiche e dove pure sono dedotte le più importanti proprietà delle funzioni di Bessel. I tre capitoli successivi (II, III e IV) sono dedicati alla trasformazione di Laplace. Precisamente nel Cap. II si introduce l'integrale di Laplace e se ne stabiliscono le principali proprietà (lo studio viene limitato alla trasformazione unilatera). Tale capitolo è pure corredato da una tabella di trasformate che vengono tutte ricavate. Il cap. III è dedicato alla trasformazione per serie e in esso vengono anche stabiliti teoremi relativi agli sviluppi asintotici. Applicazioni varie ne sono fatte, fra cui la determinazione degli sviluppi asintotici delle funzioni di Bessel. Lo studio dell'integrale di Laplace termina con il Cap. IV, dove si stabiliscono le proprietà del prodotto integrale e così pure il teorema di Borel-Horn relativo alla sua trasformazione.

Nel cap. V è considerata l'inversione della trasformata di Laplace. Stabilita l'univocità dell'antitrasformazione, si deduce la formula d'inversione di Riemann, si stabiliscono condizioni affinchè una funzione sia una trasformata e si fanno applicazioni varie, fra cui la deduzione del teorema di espansione di Heaviside. Regole son date per l'antitrasformazione.

I capitoli successivi (VI, VII, e VIII) sono dedicati alle applicazioni. Nella prima parte del cap. VI si illustrano le possibilità offerte dalla trasformazione di Laplace nella verifica di identità, nella valutazione di prodotti integrali e sulla sommazione delle serie, mentre nella seconda parte si considera la risoluzione delle equazioni integrali di Volterra di 2^a e 1^a specie, a nuclei del ciclo chiuso. Nel cap. VII si tratta della risoluzione delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, con un esempio tratto dalla teoria dei circuiti elettrici. Considerato è pure il caso dei coefficienti polinomiali. Infine nel cap. VIII si accenna, mediante un esempio, alle possibilità offerte dalla teoria nell'integrazione di equazioni o sistemi di equazioni alle derivate parziali.

L'esposizione della materia è resa particolarmente interessante dalla ricchezza di continui riferimenti ai più vari argomenti dell'analisi con i quali la teoria della trasformazione di Laplace si ricollega. E ciò rende il corso del Prof. Ascoli particolarmente pregevole ai fini della formazione culturale degli studenti ai quali esso è destinato. La cura posta dall'A. nello sviluppare deduzioni e calcoli fino ai particolari rende agevole la comprensione della materia e arricchisce il pregio didattico del libro. Le opere di autori italiani sulla trasformazione di Laplace sono ricordate e, ove possibile, riportati i loro contributi. Anche nel libro del Prof. Ascoli, che pur vuole essere un corso elementare, non manca qua e là qualche personale contributo. Notevole, per la semplicità dei mezzi con cui è condotta, è un'originale deduzione della trasformata delle funzioni di Bessel di 1ª specie e di ordine qualunque.

GIOVANNI ZIN

LUCIEN GODEAUX - *Les transformations birationnelles du plan*, Mémorial des Sciences Mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 2ª ed., 1953, pp. 70.

Le ricerche sull'approssimazione delle trasformazioni puntuali mediante trasformazioni cremoniane, coltivate in Italia in questo ultimo decennio, hanno provocato più o meno direttamente nuove ricerche anche sulle stesse trasformazioni cremoniane. D'altra parte, sono recentemente progrediti per merito della Scuola geometrica belga gli studi sulla teoria dei sistemi lineari, dal punto di vista della geometria birazionale. Il GODEAUX ha quindi giustamente ritenuto opportuno aggiornare la sua precedente opera del 1927 sulle trasformazioni cremoniane pubblicando questa nuova edizione.

Il volume è diviso in sei Capitoli. Il Cap. I è dedicato ai punti singolari delle curve piane algebriche e il Cap. II ai fondamenti sui sistemi lineari di curve piane algebriche. Nel Cap. III viene esposta la teoria delle trasformazioni birazionali fra piani e nel Cap. IV si tratta lo scioglimento delle singolarità delle curve piane algebriche mediante trasformazioni cremoniane e la decomposizione delle trasformazioni cremoniane piane nel prodotto di trasformazioni quadratiche. Nel Cap. V vengono studiati i sistemi lineari di curve piane algebriche dal punto di vista birazionale, le trasformazioni birazionali cicliche, involutorie, aventi una curva unita, i gruppi finiti di trasformazioni birazionali, le involuzioni piane. Il Cap. VI infine è dedicato ai gruppi continui finiti di trasformazioni birazionali.

L'attuale edizione si scosta dalla precedente per l'uso che l'A. fa qui della superficie rappresentativa di una trasformazione cremoniana nella determinazione delle proprietà della trasformazione stessa. Questa superficie rappresentativa usata da GODEAUX è la superficie normale di quella, considerata dal recensore, che rappresenta la trasformazione cremoniana sulla V_4 delle coppie di punti dei due piani.

Classici risultati di MONTESANO vengono in questa edizione stabiliti seguendo una recente dimostrazione di B. SEGRE. Alcuni paragrafi del Cap. V sono completamente nuovi, rispetto all'edizione precedente. In essi trovano posto i recenti risultati della Scuola belga sui sistemi lineari. Anche alla dimostrazione di CHISINI del teorema di NOETHER viene dato maggior rilievo nella presente edizione.

Chiude il volume un'ampia bibliografia nella quale, come dice l'A. nella prefazione, figurano anche lavori ai quali non ci si riferisce nel testo, come quelli di FANO sulle trasformazioni algebriche di contatto e quelli del recensore sull'approssimazione delle trasformazioni puntuali mediante trasformazioni cremoniane. I lavori che appaiono nella bibliografia sono stati pubblicati entro il 1949, e ciò spiega come in questa pur recentissima edizione non appaiano le ultime pubblicazioni.

Con questa Opera l'A. aggiunge una nuova benemerenza alle molte che ha conquistato nel campo della Geometria algebrica.

MARIO VILLA

H. KOBER: *Dictionary of Conformal Representations* - New York, Dover Publ. 1952, XVI + 208 pp. e 447 diagrammi; prezzo (rileg.) Dollari 3,95.

Questo utilissimo « dizionario » di trasformazioni conformi fu pubblicato per la prima volta, quasi clandestinamente, dall'Ammiragliato Britannico durante l'ultima guerra, in una modesta edizione litografica, e quei pochi che — come chi scrive — avevano avuto occasione di usarlo e apprezzarlo senza possedere una copia in proprio, molto si dolevano che non fosse in commercio.

Ora questa lacuna è colmata e — sebbene la presente edizione non sia neanche essa troppo bella (riproduzione *offset* da un comune dattiloscritto) e deluda un po' sotto questo rispetto — non v'è dubbio che questo dizionario verrà presto considerato come un indispensabile « ferro del mestiere » da tutti quelli, e sono legione, che, come molti cultori di Fisica Matematica, hanno frequenti occasioni di servirsi di speciali trasformazioni conformi. Essi troveranno invero in esso, in una forma concisa ma chiara, le formule all'uopo necessarie in molti casi, e una quantità di diagrammi (non molto belli artisticamente, ma anch'essi molto chiari) che permetteranno spesso di giudicare a colpo d'occhio se la corrispondente trasformazione conforme è o meno atta a risolvere il particolare problema che si ha in vista.

Specialmente ben curata è la parte relativa alle funzioni ellittiche (27 pp.) mentre, pel rimanente, si tratta quasi esclusivamente di trasformazioni relative a funzioni elementari, algebriche o trascendenti.

Una delle peculiarità del libro è l'uso, diciamo così, di una *notazione complessa* in elementari considerazioni di Geometria Analitica. L'A. non si limita cioè, come quasi tutti fanno, ad indicare un cerchio del piano complesso z con la scrittura $|z - z_0| = \text{cost.}$; ma usa anche, per esempio, la scrittura $|z - z_1|\,|z - z_2| = \text{cost.}$ per indicare una cassinoide con i fuochi z_1 e z_2, ecc. Tali notazioni sono spesso comode ed è probabile che si diffonderanno anche in altri campi.

FRANCESCO G. TRICOMI

F. LÖSCH - F. SCHOBLIK: *Die Facultät (Gammafunction) und verwandte Funktionen*, Teubner, Leipzig, 1951, pp. 202.

In questo libro sono esposte con molta cura non soltanto le proprietà essenziali della funzione *gamma* e delle altre funzioni a questa legate, ma anche alcune applicazioni di interesse particolare per gli ingegneri, i fisici ed i tecnici in genere; per la lettura è sufficiente la conoscenza degli elementi dell'Analisi Matematica e della Teoria delle Funzioni.

Il materiale è ricavato da un manoscritto lasciato inedito dal dott. F. SCHOBLIK; la revisione è stata curata dal Prof. dott. F. LÖSCH della Technische Hochschule Stuttgart. Il Prof. LÖSCH, pur conservando le parti essenziali del manoscritto, ha però apportato alcuni cambiamenti, come è dichiarato nella prefazione.

Il volume è diviso in tre parti: I) die Fakultät; II) die unvollständige Fakultät; III) Anwendungen.

Nella prima sono esposte le proprietà fondamentali della funzione *gamma* riguardata come soluzione della equazione funzionale

$$(z+1)\varphi(z+1) = \varphi(z)$$

e per la quale l'A. usa il simbolo $(z-1)!$ in luogo di $\Gamma(z)$; è richiamata poi l'espressione $z! = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^z}{1+z/n}$, sono studiate le funzioni $\psi^{(n)}(z) = \frac{d^{n+1} lg z!}{dz^{n+1}}$,

ed è dimostrata la formula di Pincherle-Mellin

$$|z!| = |(x+iy)!| = e^{-\frac{\pi}{2}|y|} |y|^{x+1/2} (\sqrt{2\pi}+\varepsilon)$$

con $\lim_{|y|\to\infty} \varepsilon = 0$, uniformemente, in $\alpha \leq x \leq \beta$

Seguono le rappresentazioni asintotiche della funzione *gamma*, la formula e la serie di Stirling (vedi Tricomi, Accad. Lincei, 1939) e le rappresentazioni integrali di Eulero, Gauss, Hankel, Dirichlet, Féaux, Binet, Poisson, Schaar, ecc.

Richiamati infine alcuni integrali che possono ricondursi alla funzione *gamma*, è studiata la risoluzione della equazione funzionale

$$R_1(z)f(z+1) + R_2(z)f(z) = 0 ,$$

essendo $R_1(z)$ ed $R_2(z)$ polinomi; si espongono poi due applicazioni alla risoluzione delle equazioni differenziali ipergeometriche (di ordine finito) ed all'integrale di Mellin-Barnes.

La seconda parte tratta della funzione *gamma incompleta*, cioè della funzione $P_\rho(z) = \int_0^\rho e^{-t} t^z dt$, indicata con $P(z, \rho)$, e della funzione $Q_\rho(z) = \int_\rho^\infty e^{-t} t^z dt$ indicata con $Q(z, \rho)$.

Sono poi considerate la funzione integral-logaritmo (li), integral-esponenziale (Ei), integral-seno (Si) ed integral-coseno (Ci), e richiamate varie formule, tra cui

$$Ei(\rho) = -Q(-1, \rho e^{-\pi i}) = -\int_{\rho}^{\infty} \frac{e^t}{t}\, dt = li(e^{\rho})$$

$$Ei(i\rho) = Ci(\rho) + iSi(\rho) - \frac{\pi i}{2}.$$

E' trattata inoltre la funzione $erf(\rho)$ (funzione degli errori) di Gauss indicata con

$$\Phi(\rho) = 1 - L(\rho)$$

ove

$$L(\rho) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\rho}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, Q\left(-\frac{1}{2}, \rho^2\right).$$

Chiudono la seconda parte gli integrali di Fresnel, i polinomi di Hermite e le funzioni di Whittaker.

Nella terza parte sono esposte brevemente dieci applicazioni delle funzioni considerate nelle due parti precedenti; trattasi di interessanti esempi riguardanti l'astronomia, la statistica, la teoria del calore, l'elettricità, ecc.

Concludendo, questo volume che appare un ottimo aggiornamento della classica opera di N. Nielsen (N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gamma-Funktion, Leipzig, 1906) riuscirà utile ai cultori di scienza pura ed applicata.

GIUSEPPE BELARDINELLI

L. BIEBERBACH: *Einführung in die Funktionentheorie*, II ediz., Verlag für Wissenschaft und Fachbuch, Bielefeld, 1952, pp. 220.

Il volume è una succinta ed efficace esposizione degli elementi della teoria delle funzioni analitiche e delle sue applicazioni teoriche e pratiche, e potrà essere di grande giovamento ai nostri studenti di matematica e per lo scelto ed utile materiale di esercitazione, e per i numerosi esempi, e per le proposizioni da svolgere poste in fondo ad ogni paragrafo, che serviranno a saggiare le capacità di ricerca dello studioso.

Il volume si compone di 220 pagine e gli argomenti vi sono suddivisi in 29 paragrafi; completa l'esposizione un indice analitico con brevi notizie storiche.

Nei primi 22 paragrafi sono trattate le proposizioni fondamentali della teoria delle funzioni analitiche; nel paragrafo 23 il teorema di Vitali sulla convergenza uniforme delle serie di funzioni ed il teorema di Osgood; nei paragrafi 24, 25, 26, 27 i teoremi fondamentali della rappresentazione conforme, in particolare nel paragrafo 26 sono esposti in modo elegante i metodi di Heinhold, Ringleb, Theodorsen, ecc.; negli ultimi due paragrafi l'A. tratta del potenziale e della idrodinamica fornendo interessanti ed utili esempi.

GIUSEPPE BELARDINELLI

KARL MENGER: *Calculus - A Modern Approach* - Illinois Institute of Tecnology, Chicago 16, Illinois (U. S. A.), pp. XXV + 255; Dollari 4,50.

L'A., notissimo per il suo Math. Kolloquium di Vienna (1931) e di Notre Dame University (1939) ha redatto un corso sui capitoli basilari del Calcolo Differenziale ed Integrale premettendovi una interessante e vivace introduzione. di 23 pagine. In questa, poste in risalto alcune manchevolezze del simbolismo della tradizionale trattatistica, sopravvissute alla critica di Lagrange, Cauchy, Bolzano, Weierstrass, l'A., traendo partito da alcuni suoi studi dedicati a questo soggetto fin dal 1944, traccia la via per eliminarle.

L'A. richiama inizialmente alcuni canoni ai quali deve inspirarsi il simbolismo matematico, e in base al primo di essi « non scrivere ciò che non è necessario » giustifica ad esempio il simbolo $\int_0^\pi \sin$ invece del tradizionale $\int_0^\pi \sin x dx$; il secondo canone « che una notazione valida per una classe deve restare valida per un elemento particolare della stessa classe », e il terzo che « in un'uguaglianza uno stesso simbolo deve conservare in ogni punto lo stesso significato » lo portano ad escludere la notazione $\frac{df(x)}{dx}$ per la derivata di $f(x)$ in un punto x ed adottare invece la notazione DCx, $DC7$ per la derivata della curva $C : y = f(x)$ nel punto x o nel punto 7.

Per obbedire al quarto canone che « deve esser sempre lecito sostituire ad un simbolo (ad es. 2^3) un altro che gli sia uguale (8) » l'A. osserva anche che la notazione tradizionale di derivata è costretta a complicarsi violando in tal modo il quinto canone dell'« economia delle notazioni ».

Queste premesse giustificano l'introduzione del simbolo I per la funzione che in ogni punto x vale x, e di I^n per quella che è identica con x^n, e da qui seguono le notazioni $DI^3 = 3I^2$, $D\log = I^{-1}$, $\int_0^1 I^3 = \frac{1}{4}$, $\int_a^b = [\log]_a^b$.

L'A. nota ancora che le funzioni considerate nell'Analisi sono le così dette *funzioni pure* mentre quelle delle scienze applicate sono *funzioni descrittive.* Così se $V(x)$ è una funzione pura l'argomento x può assumere qualsiasi valore, mentre se V indica il volume di una sfera, V è una funzione descrittiva ed x può rappresentare sia la variabile raggio sia la variabile temperatura. L'A., nel Cap. VII del testo, mostrerà poi che il suo simbolismo può ben essere applicato alle funzioni descrittive.

Il volume comprende undici capitoli. I primi tre costituiscono una interessante e felice premessa: i due problemi della derivazione e dell'integrazione, considerati l'uno come inverso dell'altro sono trattati numericamente e graficamente con particolare riferimento alle funzioni a scala. Nel Cap. IV fx sostituisce il tradizionale simbolo $f(x)$; i simboli fg oppure t_{fg} stanno per $f[g(x)]$, ed f^* indica la funzione inversa di fx; nel capitolo V sul concetto di limite e di funzione continua il simbolo $\underset{x \to \infty}{\lambda/\mu}$ indica il limite di una funzione quando la variabile tende all'infinito per valori interi; nel VI, introdotto il simbolo $\Delta_a f$

per la differenza $f - fa$ la derivata di f in a è definita dalla relazione

$$Df = \lim_{a} \frac{\Delta_a f}{\Delta_a I}$$

la derivata di ordine n è indicata con D^n e la primitiva di una fx, chiamata dall'A., *antiderivata*, con $D^{-1} f$.

Seguono le formule fondamentali del Calcolo Integrale.

E' da notare che il simbolo Av_f (Average) è usato per la media

$$\frac{1}{n}\left[f\left(a+1\,\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+2\,\frac{b-a}{n}\right)+\ldots+f\left(a+(n-1)\,\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

in luogo del moderno simbolo $\mathfrak{M}$ (Mittel, Moyenne, Media).

Il Cap. VII contiene un approfondito esame del concetto di funzione descrittiva, il Cap. VIII è dedicato alle regole di derivazione, il IX a quelle di integrazione e il X al teorema del valor medio e alla formula di Taylor.

I simboli $Df + g$, $Df \cdot g$, Dfg stanno rispettivamente per $(Df) + g$, $(Df) \cdot g$, $(Df)g$ mentre le derivate della somma e del prodotto di f e g sono indicate rispettivamente con $D(f+g)$, $D(f \cdot g)$.

Il recensore non è dello stesso avviso dell'A. a proposito della notazione Leibnitziana $\frac{dz}{dx}$ che giustifica assai bene la formula $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ la cui generalizzazione $\frac{d(z_1 \ldots z_n)}{d(x_1 \ldots x_n)}$ per il determinante Jacobiano prepara assai bene alla formula

$$\int_{(c)}\!\!\ldots\!\int f(z_1 \ldots z_n)d(z_1 \ldots z_n) = \int_{(c')}\!\!\ldots\!\int f[z_1(x_1 \ldots x_n) \ldots]\,\frac{d(z_1 \ldots z_n)}{d(x_1 \ldots x_n)}\,d(x_1 \ldots x_n)$$

del calcolo integrale.

Nel Cap. XI, con un simbolismo in perfetta armonia con quello dei capitoli precedenti l'A. considera le funzioni di più variabili e approfondisce il concetto di funzione e infine in un'Appendice sono esaminati alcuni semplici tipi di equazioni differenziali.

L'A. annuncia una successiva edizione con nuovi capitoli dedicati ai massimi e minimi, alle funzioni di più variabili, alle funzioni complesse e all'integrale di Stieltjes.

Numerosi sono gli esercizi esplicativi che accompagnano tutti gli argomenti dell'attuale volume cosicchè esso contiene quanto occorre per un primo studio dell'Analisi.

Non vi è dubbio che le critiche del Menger al simbolismo tradizionale dell'Analisi debbono essere considerate dagli studiosi e alcuni dei simboli da lui proposti, i quali soddisfano al canone dell'economia delle notazioni, potrebbero essere sistematicamente usati per mettere più in risalto i punti essenziali delle dimostrazioni.

GIOVANNI SANSONE