Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alfredo Moessner

Due problemi diofantei.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 71–73.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_71_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Due problemi diofantei.

Nota di ALFREDO MOESSNER (a Gunzenhausen).

Sunto. - *Si indicano alcune soluzioni di due sistemi diofantei.*

I. – Sia da risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}
A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2,\ B_3 &\overset{4}{=} C_1,\ C_2,\ C_3,\ D_1,\ D_2,\ D_3 \\
A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 &= C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \\
A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 &= C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 \\
A_1 + A_2 + A_3 &= C_1 + C_2 + C_3 \\
B_1^3 + B_2^3 + B_3^3 &= D_1^3 + D_2^3 + D_3^3 \\
B_1 + B_2 + B_3 &= D_1 + D_2 + D_3 \\
B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 &= D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \\
A_1^3,\ A_2^3,\ A_2^3,\ E_1,\ E_2,\ E_3 &\overset{4}{=} C_1^3,\ C_2^3,\ C_3^3,\ F_1,\ F_2,\ F_3 \\
E_1 + E_2 + E_3 &= F_1 + F_2 + F_3 .
\end{aligned}$$

La notazione $A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2,\ B_3 \overset{4}{=} C_1,\ C_2,\ C_3,\ D_1,\ D_2,\ D_3$ indica il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3 &= C_1 + C_2 + C_3 + D_1 + D_2 + D_3 \\
A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 &= C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 \\
A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3 &= C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 + D_1^3 + D_2^3 + D_3^3 \\
A_1^4 + A_2^4 + A_3^4 + B_1^4 + B_2^4 + B_3^4 &= C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + D_1^4 + D_2^4 + D_3^4 .
\end{aligned}$$

a) Risolviamo dapprima il sistema:

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = C_1 + C_2 + C_3 \\ A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 = C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 \\ A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \end{cases}$$

ponendo $A_1 = p(m^2p - n^2q)$; $A_2 = m(-mp^2 + nq^2)$; $A_3 = nq(-mq + np)$; $C_1 = q(m^2p - n^2q)$; $C_2 = n(-mp^2 + nq^2)$; $C_3 = mp(-mq + np)$.

b) Se valgono le (1) vale anche $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 \stackrel{4}{=} C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$, se $B_1 = -C_1$; $B_2 = -C_2$; $B_3 = -C_3$ e $D_1 = -A_1$; $D_2 = -A_2$; $D_3 = -A_3$.

c) Poichè per la (1)

$$\begin{cases} A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 = C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 \\ A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3, \end{cases}$$

così, se $s = A_1^3 + A_2^3 + A_3^3$, vale anchè l'identità:

$$A_1^3,\ A_2^3,\ A_3^3,\ E_1,\ E_2,\ E_3, \stackrel{4}{=} C_1^3,\ C_2^3,\ C_3^3,\ F_1,\ F_2,\ F_3,$$

se poniamo $E_1 = s - C_3^3$, $E_2 = s - C_2^3$, $E_3 = s - C_1^3$, e $F_1 = s - A_3^3$, $F_2 = s - A_2^3$, $F_3 = s - A_1^3$.

Otteniamo così il sistema:

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3 &= C_1 + C_2 + C_3 + D_1 + D_2 + D_3 \\
A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 &= C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + D_1^2 + D_2^3 + D_3^3 \\
A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3 &= C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 + D_1^3 + D_2^3 + D_3^3 \\
A_1^4 + A_2^4 + A_3^4 + B_1^4 + B_2^4 + B_3^4 &= C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + D_1^4 + D_2^4 + D_3^4 \\
A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 &= C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 \\
A_1 + A_2 + A_3 &= C_1 + C_2 + C_3 \\
A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 &= C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \\
B_1^2 + B_2^3 + B_3^3 &= D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 \\
B_1 + B_2 + B_3 &= D_1 + D_2 + D_3 \\
B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 &= D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \\
A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + E_1 + E_2 + E_3 &= C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 + F_1 + F_2 + F_3 \\
A_1^6 + A_2^6 + A_3^6 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 &= C_1^6 + C_2^6 + C_3^6 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 \\
A_1^9 + A_2^9 + A_3^9 + E_1^3 + E_2^3 + E_3^3 &= C_1^9 + C_2^9 + C_2^9 + F_1^3 + F_2^3 + F_3^3 \\
A_1^{12} + A_2^{12} + A_3^{12} + E_1^4 + E_2^4 + E_3^4 &= C_1^{12} + C_2^{12} + C_3^{12} + F_1^4 + F_2^4 + F_3^4 \\
E_1 + E_2 + E_3 &= F_1 + F_2 + F_3.
\end{aligned}$$

d) Esempio:

$m = 2$, $n = 1$, $p = 1$, $q = 3$, dà $A_1 = 1$, $A_2 = 14$, $A_3 = -15$, $C_1 = 3$, $C_2 = 7$, $C_3 = -10$; $s = 1^3 + 14^3 + (-15)^3 = -630$ e otteniamo $E_1 = -630 - (-10)^3 = 370$; $E_2 = -630 - 7^3 = -973$; $E_3 = -$

$-630 - 3^3 = -657$; $F_1 = -630 - (-15)^3 = 2745$; $F_2 = -630 - - 14^3 = -3374$; $F_3 = -630 - 1^3 = -631$; $B_1 = -3$, $B_2 = -7$, $B_3 = 10$; $D_1 = -1$, $D_2 = -14$. $D_3 = 15$.

e) Nota: Per un k qualsiasi si ha:

$$(1+k),\ (14+k),\ (-15+k),\ (-3+k),\ (-7+k),\ (10+k) \stackrel{4}{=}$$
$$\stackrel{4}{=} (3+k),\ (7+k),\ (-10+k),\ (-1+k),\ (-14+k),\ (15+k),$$

e

$$(1^3+k),\ (14^3+k),\ (-15^3+k),\ (370+k),\ (-973+k),\ (-657+k) \stackrel{4}{=}$$
$$\stackrel{4}{=} (3^3+k),\ (7^3+k),\ (-10^3+k),\ (2745+k),\ (-3374+k),\ (-631+k).$$

II. - Sia da risolvere in numeri interi razionali il sistema:

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2$$
$$M_1^4 + M_2^4 + M_3^4 + M_4^4 = P_1^4 + P_2^4 + P_3^4 + P_4^4$$
$$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4$$
$$M_1 + M_2 + M_3 = M_4;\ P_1 + P_2 + P_3 = P_4.$$

a) Risolviamo prima il sistema $A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2$; $A^4 + B^4 + C^4 = D^4 + E^4 + F^4$; ponendo:

$$A = 3x(x-y)\cdot z^2 + (2x+y)(x-2y)z\cdot u - (x+y)^2\cdot u^2;$$
$$B = 3(x-y)^2\cdot z^2 - (2x-y)(x+2y)z\cdot u - x(x+y)\cdot u^2;$$
$$C = 3(x^2-y^2)\cdot z^2 - 3y^2\cdot z\cdot u + (x^2-y^2)\cdot u^2;$$
$$D = -3x(x-y)\cdot z^2 + (2x-y)(x+2y)\cdot z\cdot u + (x^2-y^2)\cdot u^2;$$
$$E = -3(x^2-y^2)\cdot z^2 - (2x+y)(x-2y)\cdot z\cdot u + x(x+y)\cdot u^2;$$
$$F = 3(x-y)^2\cdot z^2 + 3y^2\cdot z\cdot u + (x+y)^2\cdot u^2;$$

dove

$$A - B = D - E = 3y(x-y)\cdot z^2 + 4(x^2-y^2)\cdot z\cdot u - y(x+y)\cdot u^2.$$

b) Ora poniamo $M_1 = A + B - C$; $M_2 = A + C - B$; $M_3 = B + C - A$; $M_4 = A + B + C$; $P_1 = D + E - F$; $P_2 = D + F - E$; $P_3 = E + F - D$; $P_4 = D + E + F$; con che è risolta la prima identità.

c) Esempio: $x = 6$, $y = 5$, $z = 3$, $u = 1$ dà, (se non teniamo conto dei segni negativi):

$$A = 163,\ B = 375,\ C = 83,\ D = 185,\ E = 27,\ F = 373.$$

Otteniamo $M_1 = 163 + 375 - 83 = 455$; $M_2 = 163 + 83 - 375 = -129$; $M_3 = 374 + 83 - 163 = 295$; $M_4 = 163 + 375 + 83 = 621$; $P_1 = 185 + + 27 - 373 = 161$; $P_2 = 185 + 373 - 27 = 531$; $P_3 = 27 + 373 - - 185 = 215$; $P_4 = 185 + 27 + 373 = 585$.