Bollettino Unione Matematica Italiana

Fernando Bertolini

Osservazioni sulle funzioni omogenee.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 65–71.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_65_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Osservazioni sulle funzioni omogenee.

Nota di FERNANDO BERTOLINI (a Roma) (*)

Sunto. - *Si dimostra che una funzione non può esser omogenea di gradi diversi, rispetto a poli diversi, e che l'insieme dei poli di una funzione omogenea costituisce uno spazio lineare* (spazio polare); *si studiano le funzioni omogenee dotate di più poli.*

Seguendo la definizione di M. PICONE [1], diremo che la funzione $f(P)$ definita nel campo connesso A dello spazio $S_{(r)}$ vi è omogenea di grado α (reale) e polo P_0, quando sia

$$\overline{P_0Q_1}^{\alpha}f(Q) = \overline{P_0Q_2}^{\alpha}f(Q_1) \tag{1}$$

per ogni coppia di punti Q_1 e Q_2 allineati a P_0, il cui segmento sia contenuto in A e non contenga P_0.

Poichè una affinità in $S_{(r)}$ non altera i rapporti mutui fra le distanze di tre punti allineati, dalla (1) segue:

I. *Posto*

$$y_k = a_h + \sum_{k=1}^{r} a_{hk}x_k \qquad (h = 1, 2, \dots, r;\ \det\|a_{hk}\| \neq 0) \tag{2}$$

$$y_h^0 = a_h + \sum_{k=1}^{r} a_{hk}x_k^0 \qquad (h = 1, 2, \dots, r)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r) = g(a_1 + \sum_{k=1}^{r} a_{1k}x_k, \dots, a_r + \sum_{k=1}^{r} a_{rk}x_k), \tag{2'}$$

(*) Lavoro eseguito all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(1) V. le sue *Lezioni di Analisi Matematica I* n. 70 (1950, Roma). La considerazione di funzioni omogenee « rispetto ad un polo » apre la via a concetti che mal si introdurrebbero limitandosi a quelle classiche (omogenee di polo nell'origine).

detto A *un campo connesso dello spazio* $(x_1, x_2, \dots, x_r)$, *e* B *il campo che in virtù delle* (2) *gli corrisponde nello spazio* $(y_1, y_2, \dots, y_r)$,

se la funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ *è omogenea in* A *di grado* α *e polo* $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$,

allora la funzione $g(y_1, y_2, \dots, y_r)$ *è omogenea in* B *di grado* α *e polo* $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_r^0)$,

e viceversa.

Diremo che la funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ e l'insieme A sono i trasformati affini (mediante le (2)) rispettivamente della funzione $g(y_1, y_2, \dots, y_r)$ e dell'insieme B.

Dimostriamo ora che

II. *Se la funzione* f(P) *è omogenea nel campo connesso* A, *di grado* α *rispetto al polo* P_1, *essa non può essere omogenea di grado* $\beta \neq \alpha$ *rispetto ad alcun altro polo* P_2, *senza risultare identicamente nulla.*

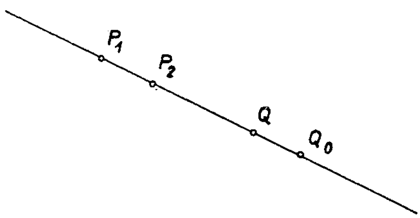
Supponiamo per assurdo, che la funzione $f(P)$ sia omogenea in A di grado α rispetto al polo P_1, di grado $\beta \neq \alpha$ rispetto al polo P_2, e che esista in A un punto Q_0 per cui $f(Q_0) \neq 0$; sia $I(Q_0)$ un intorno circolare di Q_0, contenuto in A. Distinguiamo i due casi che P_1, P_2, e Q_0 siano allineati, ovvero non lo siano.

Nel primo caso, per ogni $Q \in I(Q_0)$, appartenente alle semirette P_1Q_0 e P_2Q_0, avremo

$$f(Q) = \frac{\overline{P_1Q}^\alpha}{\overline{P_1Q_0}^\alpha} \cdot f(Q_0) = \frac{\overline{P_2Q}^\beta}{\overline{P_2Q_0}^\beta} \cdot f(Q_0),$$

e quindi l'assurdo

$$\overline{P_1Q}^\alpha \cdot \overline{P_2Q}^{-\beta} = \text{costante al variar di } Q.$$



Nel secondo caso, sia Q_2 un punto di $I(Q_0)$, del piano $P_1P_2Q_0$, interno al triangolo $P_1P_2Q_0$, sia Q_1 l'intersezione delle rette P_1Q_2 e P_2Q_0, sia Q_3 l'intersezione delle rette P_1Q_0 e P_2Q_2; se Q_2 è abbastanza vicino a Q_0 il quadrilatero piano $Q_0Q_1Q_2Q_3$ è contenuto in

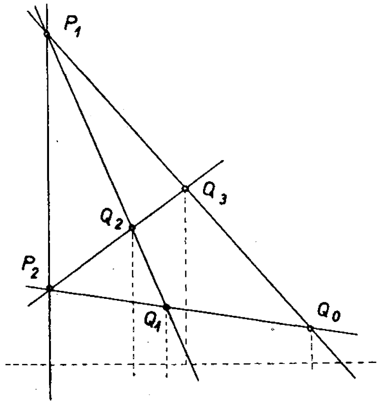
$I(Q_0)$. Avremo allora

$$f(Q_0)=\frac{\overline{P_2Q_0}^{\beta}}{\overline{P_2Q_1}^{\beta}}\cdot f(Q_1)=\frac{\overline{P_2Q_0}^{\beta}}{\overline{P_2Q_1}^{\beta}}\cdot\frac{\overline{P_1Q_1}^{\alpha}}{\overline{P_1Q_2}^{\alpha}}\cdot f(Q_2),$$

$$=\frac{\overline{P_2Q_0}^{\beta}}{\overline{P_2Q_1}^{\beta}}\cdot\frac{\overline{P_1Q_1}^{\alpha}}{\overline{P_1Q_2}^{\alpha}}\cdot\frac{\overline{P_2Q_2}^{\beta}}{\overline{P_2Q_3}^{\beta}}\cdot f(Q_3)=\frac{\overline{P_2Q_0}^{\beta}}{\overline{P_2Q_1}^{\beta}}\cdot\frac{\overline{P_1Q_1}^{\alpha}}{\overline{P_1Q_2}^{\alpha}}\cdot\frac{\overline{P_2Q_2}^{\beta}}{\overline{P_2Q_3}^{\beta}}\cdot\frac{\overline{P_1Q_3}^{\alpha}}{\overline{P_1Q_0}^{\alpha}}\cdot f(Q_0),$$

da cui

$$\frac{\overline{P_2Q_0}^{\beta}}{\overline{P_2Q_1}^{\beta}}\cdot\frac{\overline{P_1Q_1}^{\alpha}}{\overline{P_1Q_2}^{\alpha}}\cdot\frac{\overline{P_2Q_2}^{\beta}}{\overline{P_2Q_3}^{\beta}}\cdot\frac{\overline{P_1Q_3}^{\alpha}}{\overline{P_1Q_0}^{\alpha}}=1. \tag{3}$$



Ma poichè si ha (²)

$$\frac{\overline{P_2Q_0}}{\overline{P_2Q_1}}\cdot\frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{P_1Q_2}}\cdot\frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{P_2Q_3}}\cdot\frac{\overline{P_1Q_3}}{\overline{P_1Q_0}}=1, \tag{4}$$

se ne deduce (elevando la (4) alla potenza β e poi dividendo membro a membro per la (3))

$$\frac{\overline{P_1Q_2}}{\overline{P_1Q_1}}\cdot\frac{\overline{P_1Q_0}}{\overline{P_1Q_3}}=1,$$

la quale relazione implica parallelismo tra le rette Q_1Q_2 e Q_0Q_3, ciò che è assurdo. Il teorema è dimostrato.

D'ora innanzi, quindi, potremo parlare di funzioni omogenee in un campo connesso, senza specificarne il grado, il quale risulta indipendente dal polo. Ci possiamo chiedere se una funzione omogenea possa avere più poli: a ciò risponde il teorema seguente.

(²) Per dimostrarlo, si proietti la configurazione su una retta del piano $P_1P_2Q_0$, la quale sia perpendicolare alla retta P_1P_2.

III. *Se la funzione* f(P) *è omogenea nel campo connesso* A, *coi due poli distinti* P_1 *e* P_2, *allora essa ammette come poli tutti i punti della retta* P_1P_2 *(retta polare).*

Fissiamo un punto $Q_0 \varepsilon A$ e *non* allineato a P_1 e P_2, un punto P_3 del segmento P_1P_2, ed un intorno cilindrico $J(Q_0)$ di Q_0, contenuto in A e ad asse parallelo alla retta P_1P_2 ([3]) ; sia Q_3 un punto del segmento P_3Q_0, che appartenga ad $J(Q_0)$: prendendo il raggio di $J(Q_0)$ abbastanza piccolo in confronto dell'altezza, apparterranno ad $J(Q_0)$ pure i punti Q_2 (intersezione delle rette P_1Q_3 e P_2Q_0) e Q_1 (intersezione della retta per Q_3 parallela a P_1P_2, con la retta P_1Q_0); avremo allora, detto α il grado di omogeneità della $f(P)$,

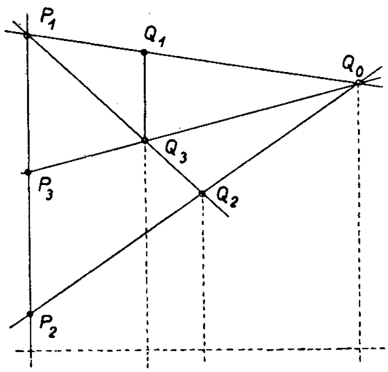
$$f(Q_2) = \frac{\overline{P_2Q_2}^{\alpha}}{\overline{P_2Q_0}^{\alpha}} \cdot f(Q_0), \quad f(Q_1) = \frac{\overline{P_1Q_1}^{\alpha}}{\overline{P_1Q_0}^{\alpha}} \cdot f(Q_0),$$

$$f(Q_3) = \frac{\overline{P_1Q_3}^{\alpha}}{\overline{P_1Q_2}^{\alpha}} \cdot f(Q_2) = \frac{\overline{P_1Q_3}^{\alpha}}{\overline{P_1Q_2}^{\alpha}} \cdot \frac{\overline{P_2Q_2}^{\alpha}}{\overline{P_2Q_0}^{\alpha}} \cdot f(Q_0),$$

e quindi, per essere

$$\frac{\overline{P_1Q_3}}{\overline{P_1Q_2}} \cdot \frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{P_2Q_0}} = \frac{\overline{P_3Q_3}}{\overline{P_3Q_0}} \ ([4]),$$

$$f(Q_3) = \frac{\overline{P_3Q_3}^{\alpha}}{\overline{P_3Q_0}^{\alpha}} \cdot f(Q_0). \tag{5}$$



Prendiamo ora fuori della retta P_1P_2 due punti arbitrari Q' e Q'' allineati a P_3, il segmento dei quali sia contenuto in A

([3]) Tale intorno è costituito dal prodotto cartesiano di un intervallo aperto della retta P_1P_2, e di un campo circolare dell'iperpiano ad essa normale: la lunghezza dell'intervallo ed il raggio del campo circolare considerati, saran detti lunghezza e raggio risp. dell'intorno cilindrico.

([4]) Cfr. n. ([2]).

e non contenga P_3: per il lemma di HEINE-BOREL, v'è un numero finito di intorni cilindrici del tipo $J(Q)$ indicato innanzi, ricoprenti il segmento $Q'Q''$ e concatenati (5); applicando la (5) un numero finito di volte si otterrà

$$\overline{Q'P_3}^{\alpha} \cdot f(Q'') = \overline{Q''P_3}^{\alpha} \cdot f(Q'),$$

come si doveva dimostrare.

La dimostrazione si estende al caso dei punti P_3 appartenenti alla retta P_1P_2 ma non al segmento P_1P_2, scambiando l'ufficio dei punti P_1 e P_3 nella argomentazione che precede, e procedendo a ritroso.

Infine, se un punto Q della retta P_1P_2 appartiene al campo A, con argomento già impiegato nella dimostrazione del teorema II si vede che è $f(Q) = 0$.

III'. *Se la funzione* f(P) *è omogenea nel campo connesso* A, *coi poli* $P_1, P_2, \ldots, P_n$, *allora essa ammette come poli tutti i punti dipendenti da* $P_1, P_2, \ldots, P_n$: *questi punti formano uno spazio lineare* π, *che diremo spazio polare.*

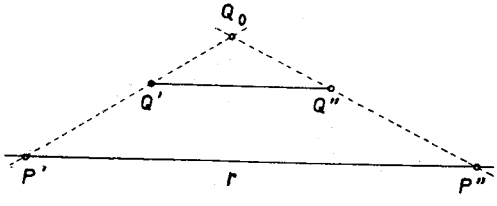
È un'immediata conseguenza del teorema precedente.

Dimostriamo ora che

IV. *Se la funzione* f(P) *è omogenea nel campo connesso* A, *con retta polare* r, *allora essa è costante su ogni segmento contenuto in* A *e parallelo ad* r.

Siano Q' e Q'' due punti di A, il cui segmento sia contenuto in A e parallelo ad r; sia η il piano della retta r e dei punti Q', Q''; prendo su r due punti P' e P'', in modo che le rette $P'Q'$ e $P''Q''$ si intersechino in un punto Q_0 posto dall'altra parte di r rispetto alla retta $Q'Q''$, il triangolo $Q_0Q'Q''$ risultando interno ad A: avremo allora

$$f(Q') = \frac{\overline{P'Q'}^{\alpha}}{\overline{P'Q_0}^{\alpha}} f(Q_0) = \frac{\overline{P''Q''}^{\alpha}}{\overline{P''Q_0}^{\alpha}} f(Q_0) = f(Q''), \text{ c.d.d.}$$



(5) Voglio dire che il primo di questi intorni ha punti comuni col secondo, il secondo col terzo, ecc.

Ne seguono i teoremi:

V. *Se la funzione* f(P) *è omogenea nel campo connesso* A, *con iperpiano polare* π, *allora essa può prolungarsi in un iperstrato* A′ *contenente* A *e parallelo a* π, *risultando costante su ogni iperpiano parallelo a* π.

Dati due punti Q' e Q'', appartenenti ad A e ad un medesimo iperpiano parallelo a π, esiste una poligonale che li congiunge, contenuta in A e formata esclusivamente di segmenti paralleli o normali a π: sui primi $f(P)$ è costante (teor. IV), sui secondi varia con la legge (1) (avendo preso come polo la proiezione del segmento su π); si deduce subito $f(Q')=f(Q'')$.

V′. *Qualunque funzione* f(P) *del tipo indicato al teorema V, e di grado* α, *si ottiene ponendo*

$$f(P)=f(x_1, x_2, \dots, x_r)=c \mid a_1+\sum_{k=1}^{r} a_{1k}x_k \mid^{\alpha} \left(\sum_{k=1}^{r} \mid a_{1k} \mid \neq 0\right); \tag{6}$$

l'iperpiano polare π *è quello d'equazione*

$$a_1+\sum_{k=1}^{r} a_{1k}x_k=0.$$

Difatti $f(P)$, per il teorema IV, dipende solo dalla distanza $\overline{P\pi}$, ed è funzione omogenea di questa distanza, con grado α e polo zero: $f(P)=k\cdot\overline{P\pi}^{\alpha}$, da cui la (6).

VI. *Se la funzione* f(P) *è omogenea nel campo connesso* A, *con spazio polare* π *a* p *dimensioni* (p $<$ r), *e sono connesse tutte le sezioni di* A *fatte con spazi a* (p + 1) *dimensioni contenenti* π, *allora* f(P) *può prolungarsi in un campo cilindrico avente per direttrice* A, *e come generatrici degli spazi a* p *dimensioni paralleli a* π, *sui quali risulta costante.*

Basta applicare il teorema V assumendo come spazio ambiente uno $S_{(p+1)}$ arbitrario contenente π.

VI′. *Qualunque funzione del tipo indicato al teorema VI, e di grado* α, *si ottiene ponendo*

$$f(P)=f(x_1, x_2, \dots, x_r)=g(a_1+\sum_{k=1}^{r} a_{1h}x_k, \dots, a_{r-p}+\sum_{k=1}^{r} a_{r-p,\,k}x_k) \tag{7}$$

$$[\,\| a_{hk} \|^2>0]$$

dove $g(y_1, y_2, \dots, y_{r-p})$ *è un'arbitraria funzione omogenea di grado* α *e polo nell'origine, in un campo* B *dello spazio* $(y_1, y_2, \dots, y_{r-p})$.

Lo spazio polare π di $f(P)$ è quello d'equazioni

$$a_h+\sum_{k=1}^{r} a_{hk}x_k=0 \qquad (h=1, 2, \dots, r-p),$$

il campo A di definizione è l'affine — attraverso le (2) — del campo cilindrico dello spazio $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ avente B per direttrice e generatrici ortogonali allo spazio $(y_1, \ldots, y_{r-p})$.

Difatti in queste ipotesi $f(P)$ non può dipendere che dalle combinazioni $y_h = a_h + \sum_{k=1}^{r} a_{hk} x_k$ $(h = 1, 2, \ldots, r-p)$, e la funzione $g(y_1, \ldots, y_{r-p})$ corrispondente alla $f(P)$ per l'affinità inversa della (2) necessariamente è omogenea di grado α.

VII. *Una funzione* f(P) *omogenea nel campo* A *di grado* α, *dotata di più di un polo, è eguale, in ogni campo circolare contenuto in* A, *alla trasformata affine di una funzione omogenea dello stesso grado, indipendente da qualcuna delle coordinate del punto oggetto.*

Basta pensare che ogni campo circolare gode delle proprietà di connessione richieste dai teoremi V e VI.