
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GABRIELLA MANARESI

Sull'equazione di Liénard generalizzata.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 8
(1953), n.1, p. 59–64.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_59_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sull'equazione di Liénard generalizzata.

Nota di GABRIELLA MANARESI (a Bologna).

Sunto. - *Come il primo paragrafo.*

1. In questa nota, considereremo l'equazione differenziale non-lineare del secondo ordine:

$$(1) \quad \ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon \frac{g'(x)}{2} + \mu f(x) \dot{x} = 0,$$

che rientra nelle equazioni differenziali dette di LIÉNARD generalizzate ⁽¹⁾. Nella (1) la x è ovviamente la funzione incognita, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ indicano al solito le sue derivate prima e seconda rispetto al tempo t , $f(x)$ e $g'(x)$ sono funzioni continue di solito non lineari della x , (si è scritto $-\varepsilon \frac{g'(x)}{2}$ per agevolare un confronto con formule che citeremo in seguito) ω , ε , μ sono costanti, le due ultime molto piccole o più precisamente tali che $\varepsilon \frac{g'(x)}{2}$ e $\mu f(x) \dot{x}$ si possano ritenere piccole rispetto agli altri termini della (1), salvo qualche breve intervallo in cui sono molto piccole $\ddot{x}$ e $\omega^2 x$.

Applicheremo alla (1) il metodo di integrazione di KRYLOFF BOGOLIUBOFF (K. B. per brevità) ⁽²⁾, cioè porremo:

$$(2) \quad x = c \cos(\omega t + \Phi), \quad \dot{x} = -c \omega \sin(\omega t + \Phi),$$

dove c e Φ sono funzioni di t ; chiameremo rispettivamente ampiezza e fase del moto la c e la $\omega t + \Phi$.

⁽¹⁾ L'equazione di LIÉNARD generalizzata è stata oggetto di numerose ricerche; si confronti ad esempio R. CONTI, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard - Esistenza e unicità*. Questo « Bollettino », (3), VII, (1952), pagg. 111-118.

⁽²⁾ Cfr. N. MINORSKY, *Meccanica non lineare*. Questo « Bollettino », (3), V, pagg. 313-330. (Si veda specialmente da pag. 323 a pag. 325).

A rigore MINORSKY scrive:

$$x = c \sin(\omega + \Phi), \quad \dot{x} = c \omega \cos(\omega + \Phi);$$

noi abbiamo usato la posizione (2) per identificare più facilmente la nostra formula con quella del LEVI-CIVITA; naturalmente i calcoli di MINORSKY vanno un po' modificati e nella formula finale bisogna sostituire i coseni ai seni, i seni col segno cambiato ai coseni.

Potremo così dimostrare che l'intervallo di tempo fra due massimi (o due minimi) successivi di x , che, per brevità, diremo periodo ⁽³⁾, si esprime mediante una formula ricavata alcuni anni fa dal LEVI-CIVITA ⁽⁴⁾ nell'ipotesi $\mu = 0$. Otterremo così, non solo una nuova dimostrazione della formula del LEVI-CIVITA, ma la sua estensione ai sistemi con resistenze passive, purchè piccole, o più in generale ai sistemi con resistenza variabile, come avviene, ad esempio, nell'oscillatore di VAN DER POL.

Proveremo poi che la $g'(x)$ non influisce sulla legge con cui varia la ampiezza.

Applicheremo infine questo risultato al caso del pendolo soggetto a resistenza dell'aria proporzionale alla velocità, ma con oscillazioni non troppo piccole, cioè nell'equazione differenziale che regge il moto del pendolo, sostituiremo al seno il suo sviluppo in serie arrestato al secondo termine.

Troveremo l'ampiezza variabile esponenzialmente col tempo, come nel caso lineare; l'espressione del periodo identica a quella di seconda approssimazione per il pendolo ordinario non soggetto a resistenze.

2. Mediante i procedimenti di K. B. si ottiene, a partire dalla (1):

$$(3) \quad \frac{dc}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \frac{g'(c \cos \theta)}{2} \sin \theta d\theta - \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} cf(c \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta,$$

$$(4) \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \frac{g'(c \cos \theta)}{2c} \cos \theta d\theta - \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c \cos \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

ove si è posto $\theta = \omega t + \Phi$.

⁽³⁾ Nel caso in cui $\mu = 0$, poichè x varia periodicamente fra il suo valore massimo e minimo, è ovvio che il periodo così definito coincide col periodo ordinario. Naturalmente il periodo, come definito nel testo, può variare a seconda dei due massimi successivi che si considerano.

⁽⁴⁾ T. LEVI-CIVITA, *Sul calcolo effettivo del periodo in un caso tipico di prima approssimazione*, « *Revista de Ciencias* », Lima (Perù), XXXVIII, (1937), pagg. 71-78. Si veda anche N. CARTOVICH, *Sul calcolo effettivo del moto perturbato, in un caso tipico di prima approssimazione*, « *Rendiconti Lincei* », (6), XXVII, (1938), pagg. 65-70; G. SANSONE, *Valutazione dell'errore nel calcolo effettivo del periodo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione*. Questo « *Bollettino* », (2), I, (1939), pagg. 422-426.

Se nel calcolo degli integrali a secondo membro di (3) e (4) l'ampiezza si considera costante, (il che è lecito perchè le variazioni di c sono in un periodo molto piccole, per la piccolezza di ε e μ) si vede subito che il primo integrale a secondo membro di (3) e l'ultimo di (4) sono nulli. Resta perciò:

$$(5) \quad \frac{dc}{dt} = -\frac{\mu c}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta,$$

$$(6) \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega c} \int_0^{2\pi} \frac{g'(c \cos \theta)}{2} \cos \theta d\theta.$$

Poichè $g'(c \cos \theta)$ non compare nel secondo membro di (5) che è quindi funzione solo di c , possiamo affermare, come già si è detto, che l'ampiezza varia indipendentemente dalla $g'(x)$. Essa poi non può mai annullarsi, altrimenti per la (5) sarebbe identicamente nulla. Sicchè, scelto, come è sempre lecito, c positivo per $t=0$, sarà c , in ogni istante, positiva.

Vogliamo ora determinare il periodo delle soluzioni oscillatorie di (1), intendendo, come si è già detto, per periodo l'intervallo di tempo che intercorre fra due massimi successivi di x .

Osserviamo che i massimi o i minimi di x , si hanno per $\dot{x}=0$, cioè in base alla seconda di (2) ed essendo $c \neq 0$ per:

$$(7) \quad \theta(t) = n\pi$$

dove n è un numero intero. Ma per n pari, x risulta positivo e uguale a $c(t)$, per n dispari risulta negativo e uguale a $-c(t)$. Ora dalla (1) si deduce che, quando $\dot{x}=0$, la $\ddot{x}$ ha lo stesso segno di $-\left(\omega^2 x - \varepsilon \frac{g'(x)}{2}\right)$; dunque se $-\varepsilon g'(x)$ ha lo stesso segno di x , si avrà un massimo per x positivo e un minimo per x negativo. Se poi $-\varepsilon g'(x)$ non ha lo stesso segno di x , essendo ε molto piccola, la predetta proprietà sul segno di $\ddot{x}$ rimane ancora valida, e del resto sarebbe facile verificarla in base al valore di c che può ricavarsi dalla (5).

Ovviamente, se $\frac{dc}{dt}$ risulta identicamente nulla, la soluzione di (1) è periodica, e il periodo da noi definito coincide col periodo ordinario.

Tornando al caso generale, se supponiamo dunque che all'istante t definito da (7) si abbia un massimo, sarà n pari e il massimo successivo si avrà ponendo in (7) in luogo di t , $t + T$,

in luogo di n il successivo numero pari, cioè $n + 2$ ⁽⁵⁾. Si avrà così:

$$(8) \quad \theta(t + T) - \theta(t) = 2\pi.$$

Ora integrando la (6) da t , a $t + T$, e tenendo conto che T differisce da $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, periodo delle oscillazioni qualora sia $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$, di quantità molto piccole, potremo, commettendo un errore trascurabile nella nostra approssimazione, integrare l'ultimo termine di (6), (che è dell'ordine di ε) da t a $t + T_0$. Avremo così, sostituendo in (8):

$$2\pi = \left[\omega T - \frac{\varepsilon T_0}{2\pi\omega c} \int_0^{2\pi} \frac{g'(c \cos \theta)}{2} \cos \theta d\theta \right],$$

da cui, ricordando il valore di T_0 , si ricava per il periodo la formula

$$(9) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\varepsilon}{c\omega^3} \int_0^{2\pi} \frac{g'(c \cos \theta)}{2} \cos \theta d\theta.$$

Il periodo dipende dalla funzione $g'(c \cos \theta)$ direttamente e dalla funzione $f(c \cos \theta)$ solo tramite c che va calcolata, s'intende, in un istante dell'intervallo di tempo a cui si riferisce quel periodo.

La (9) coincide, nell'approssimazione da noi adottata, con la formula del periodo che N. CARTOVICH ⁽⁶⁾ ottenne trasformando

⁽⁵⁾ Si ammette implicitamente $\theta = \omega t + \Phi$ funzione crescente del tempo; ciò è comprovato da (6) perchè, per la piccolezza di ε , $\frac{d\theta}{dt}$ è del segno di ω , cioè positiva.

⁽⁶⁾ La formula del CARTOVICH è nelle sue notazioni la seguente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\varepsilon}{(b-a)\omega^3} \int_0^\pi g' \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos \theta \right) \cos \theta d\theta.$$

I valori di b e di a sono definiti tenendo presente che l'equazione del moto perturbato è data sia dal CARTOVICH che dal LEVI-CIVITA in questa forma: $\ddot{x}^2 = \omega^2(x-a)(b-x) + \varepsilon g(x)$.

Ora derivando questa equazione rispetto al tempo, si ha:

$$\ddot{x} = -\omega^2 \left(x - \frac{a+b}{2} \right) + \varepsilon \frac{g'(x)}{2};$$

ponendo l'origine nel punto $\frac{a+b}{2}$, quest'ultima equazione viene a coincidere con la (1) quando si consideri $\mu = 0$ (infatti LEVI-CIVITA considera

opportunamente quella del LEVI-CIVITA. Ripetendo a ritroso i calcoli del CARTOVICH, si trova che la (9) coincide, sempre nello stesso ordine di approssimazione, con la formula del LEVI-CIVITA.

3. Come esempio consideriamo l'equazione del pendolo semplice con resistenza dell'aria, ma con oscillazioni non troppo piccole, cioè sostituiamo al seno il suo sviluppo in serie arrestato al secondo termine:

$$(10) \quad \ddot{x} + \omega^2 x - \frac{\omega^2 x^3}{6} + 2p\dot{x} = 0.$$

Posto

$$\varepsilon \frac{g'(x)}{2} = \frac{\omega^2 x^3}{6} \quad \mu f(x) = 2p,$$

la (10) viene a coincidere con la (1). Supponendo p piccola ed essendo sempre x^3 piccola, si può ritenere piccola anche $\frac{\omega^2 x^3}{6}$.

Sarà quindi possibile applicare le formule del paragrafo precedente; in particolare la (5) nel presente caso diviene:

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{c}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2p \sin^2 \theta d\theta = -cp$$

da cui

$$c = c_0 e^{-pt},$$

dove c_0 è il valore iniziale di c .

solo sistemi a energia costante). Dopo questo cambiamento di origine si deve porre nella formula di CARTOVICH $a + b = 0$, cioè $b = -a$.

D'altra parte se teniamo conto del termine in ε , come osserva il LEVI-CIVITA, la funzione $\dot{x}$ si annullerà nei punti a^* e b^* che differiscono da a e b di quantità dell'ordine di ε .

Ora è da notare che a^* e b^* sono rispettivamente il minimo e il massimo di x e coincidono perciò con le nostre $-c$ e $+c$; quindi, commettendo errori dell'ordine di ε^2 e trascurabili nella nostra approssimazione, possiamo nella formula di CARTOVICH porre, in luogo di a e b rispettivamente $-c$ e $+c$.

Si trova così:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\varepsilon}{c\omega^3} \int_0^{\pi} g'(-c \cos \theta) \cos \theta d\theta.$$

Cambiando θ in $\pi - \theta$ e tenendo conto che l'integrale di $g'(c \cos \theta) \cos \theta$ tra 0 e π vale la metà della stessa funzione fra 0 e 2π , si ritrova la formula del testo.

L'ampiezza dell'oscillazione varia esponenzialmente come nel caso lineare.

Il periodo, per la (9) vale :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{c^2}{6\omega} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta \quad (^7) = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{c^2}{6\omega} \cdot \frac{3}{4} \pi = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{c^2}{16} \right)$$

formula classica per il periodo del pendolo in seconda approssimazione che rimane valida anche tenendo conto della resistenza dell'aria.

(⁷) Si ricordi che :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \pi - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 2\theta) d\theta = \\ &= \pi - \frac{1}{4} (2\pi - \pi) = \frac{3}{4} \pi. \end{aligned}$$
