Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alessandro Ossicini

Funzione generatrice dei prodotti di due particolari polinomi di Jacobi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 45–52.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_45_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Funzione generatrice dei prodotti di due particolari polinomi di Jacobi.

Nota di ALESSANDRO OSSICINI (a Roma).

Sunto. - *Si determina la funzione generatrice dei prodotti di due particolari polinomi di* JACOBI *partendo da uno sviluppo relativo al prodotto di due funzioni di* BESSEL *di prima specie.*

a) Consideriamo lo sviluppo (1)

$$J_\mu(az)J_v(bz) = \tag{1}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}az\right)^\mu\left(\frac{1}{2}bz\right)^v}{\Gamma(v+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\left(\frac{1}{2}az\right)^{2m} F\left(-m, -\mu-m;\ v+1;\ \frac{b^2}{a^2}\right)}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)},$$

ove $J_k(z)$ e $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ rappresentano rispettivamente la funzione di BESSEL di prima specie e la serie ipergeometrica di GAUSS.

Per $a \equiv ia$ e $\mu = \frac{1}{2}$ tenuto conto che

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}[e^z - e^{-z}] \text{ (2)};$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = (1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma; \frac{x}{x-1}\right) \text{ (3)}; \tag{2}$$

la (1) diviene

$$\frac{J_v(bz)}{\sqrt{\pi}}[e^{az} - e^{-az}] = \tag{3}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v+1}}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} (a^2+b^2)^m F\left(-m, m+v+\frac{3}{2}, v+1; \frac{b^2}{a^2+b^2}\right).$$

(1) Cfr. G. N. WATSON, *A Treatise on the theory of Bessel functions*, (Cambridge, 1948), p. 148.

(2) Cfr. G. N. WATSON, op. cit. (1), p. 80.

(3) Cfr. A. GRAY e G. B. MATHEWS, *A Treatise on Bessel functions*, (Londra, 1931), p. 256.

Dalla (3) si ha

$$
(4)\qquad \begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty [e^{-(q-a)z}-e^{-(q+a)z}]J_v(bz)J_v(cz)dz=\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v}(a^2+b^2)^m}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}F\left(-m,\, m+v+\frac{3}{2},\, v+1;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)\int_0^\infty e^{-qz}z^{2m+v+1}J_v(cz)dz.
\end{aligned}
$$

Il primo integrale, tenuto conto della [4]

$$
(5)\qquad \int_0^\infty e^{-\lambda z}J_v(bz)J_v(cz)dz=\frac{1}{\pi\sqrt{bc}}\,Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda^2+b^2+c^2}{2bc}\right),
$$

ove $Q_{v-\frac{1}{2}}$ rappresenta la funzione di LEGENDRE di seconda specie, è uguale a

$$
(6)\qquad \begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty [e^{-(q-a)z}-e^{-(q+a)z}]J_v(bz)J_v(cz)dz=\\
&=\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{bc}}\left[Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{(q-a)^2+b^2+c^2}{2bc}\right)-Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{(q+a)^2+b^2+c^2}{2bc}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Per il secondo integrale (di HANKEL) si ha [5]

$$
(7)\qquad \begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-qz}z^{2m+v+1}J_v(cz)dz=\\
&=\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{q}{c}\right)^v\Gamma(2m+2v+2)}{q^{2m+2v+2}\Gamma(v+1)}\,F\left(m+v+1,\ m+v+\frac{3}{2},\ v+1,\ \frac{-c^2}{q^2}\right).
\end{aligned}
$$

Se si tien conto anche della (2) la (7) può porsi sotto la forma

$$
(8)\qquad \begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-qz}z^{2m+v+1}J_v(cz)dz=\\
&=\frac{q\left(\frac{1}{2}c\right)^v}{\Gamma(v+1)}\Gamma(2m+2v+2)(q^2+c^2)^{-m-v-\frac{3}{2}}F\left(-m,m+v+\frac{3}{2},\,v+1;\frac{c^2}{c^2+q^2}\right),
\end{aligned}
$$

[4] Cfr. G. N. WATSON, op. cit. [1], p. 389.
[5] Cfr. G. N. WATSON, op. cit. [1], p. 385.

e quindi

$$\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} aq(bc)^{v+\frac{1}{2}}}\left[Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{(q-a)^2+b^2+c^2}{2bc}\right)-Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{(q+a)^2+b^2+c^2}{2bc}\right)\right]=$$

$$(9) \qquad =\frac{1}{[\Gamma(v+1)]^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2v}(a^2+b^2)^m}{m\,!\,\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}(c^2+$$

$$+q^2)^{-m-v-\frac{3}{2}}\Gamma(2m+2v+2)F\left(-m,\ m+v+\frac{3}{2},\ v+1,\ \frac{b^2}{a^2+b^2}\right)\times$$

$$\times F\left(-m,\ m+v+\frac{3}{2},\ v+1,\ \frac{c^2}{c^2+q^2}\right).$$

Questo sviluppo, se si utilizza la formula di duplicazione del LEGENDRE [6]

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z),$$

diviene

$$\frac{1}{2\pi aq(bc)^{v+\frac{1}{2}}}\left[Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{(q-a)^2+b^2+c^2}{2bc}\right)-Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{(q+a)^2+b^2+c^2}{2bc}\right)\right]=$$

$$(10) \qquad =\frac{1}{[\Gamma(v+1)]^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m+v+1)\Gamma\left(m+v+\frac{3}{2}\right)}{m\,!\,\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}(a^2+b^2)^m(q^2+$$

$$+c^2)^{-m-v-\frac{3}{2}}F\left(-m,\ m+v+\frac{3}{2},\ v+1;\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)F\left(-m,\ m+v+\frac{3}{2},\ v+1;\frac{c^2}{c^2+q^2}\right).$$

E posto

$$a^3+b^2=1, \quad x=1-2b^2, \quad y=\frac{q^2-c^2}{q^2+c^2}, \quad c^2=\frac{1-y}{2z},$$

[6] Cfr. G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Vol. I, (Padova, 1950), p. 186.

e introdotti i polinomi di JACOBI (7)

$$(11)\quad P_m^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!\,\Gamma(\alpha+1)}F\left(-m,\ m+\alpha+\beta+1,\ \alpha+1;\ \frac{1-x}{2}\right)$$

si conclude $|x|\leq 1$ $|y|\leq 1$ $|z|<|x+y-1-\sqrt{(x+y)(x+y-2)}|$,

$$(12)\quad \begin{gathered}\frac{2^{v+\frac{1}{2}}}{\pi(\sqrt{z(1-x)(1-y)})^{v+\frac{1}{2}}(\sqrt{z(1+x)(1+y)})}\left[Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{z+1-\sqrt{z(1+x)(1+y)}}{\sqrt{z(1-x)(1-y)}}\right)-\right.\\ \left.-Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{z+1+\sqrt{z(1+x)(1+y)}}{\sqrt{z(1-x)(1-y)}}\right)\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m!\,\Gamma\left(m+v+\frac{3}{2}\right)z^m}{\Gamma(m+v+1)\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}P_m^{\left(v,\frac{1}{2}\right)}(x)P_m^{\left(v,\frac{1}{2}\right)}(y),\end{gathered}$$

o pure

$$(13)\quad \begin{gathered}\frac{2^{v+\frac{1}{2}}}{\pi(\sqrt{z(1-x)(1-y)})^{v+\frac{1}{2}}\sqrt{z(1+x)(1+y)}}\left[Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{z+1-\sqrt{z(1+x)(1+y)}}{\sqrt{z(1-x)(1-y)}}\right)-\right.\\ \left.-Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{z+1+\sqrt{z(1+x)(1+y)}}{\sqrt{z(1-x)(1-y)}}\right)\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B\left(m+1,\frac{1}{2}\right)}{B\left(m+v+1,\frac{1}{2}\right)}z^m P_m^{\left(v,\frac{1}{2}\right)}(x)P_m^{\left(v,\frac{1}{2}\right)}(y),\end{gathered}$$

ove B è la Beta euleriana di prima specie (8).

b) Nel caso particolare $v=\frac{1}{2}$ poichè abbiamo (9), (10)

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1},$$

$$P_m^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)=\frac{2\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{(m+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}V_m(x),$$

(7) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte prima, seconda edizione, (Bologna, 1948), p. 150.

(8) Cfr. G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, (Bologna, 1949), p. 279.

(9) Cfr. E. W. HOBSON, *The theory of spherical, and ellipsoidal harmonics*, (Cambridge, 1931), p. 65.

(10) Cfr. G. SANSONE, op. cit. (8), pp. 386-390.

ove $V_m(x)$ indica il polinomio di TCHEBYCHEF di seconda specie, la (13) diviene $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| < 1$,

$$\frac{1}{2^2 z \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \log \frac{z^2+1-2xyz+2z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{z^2+1-2xyz-2z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} = \tag{14}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m+1} V_m(x) V_m(y).$$

Posto $x = \cos\varphi$ $y = \operatorname{sen}\psi$ a causa della ([11])

$$V_m(\cos u) = \frac{\operatorname{sen}(m+1)u}{\operatorname{sen} u}$$

si ha ($|z| < 1$)

$$\frac{1}{2^2 z \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi} \log \frac{z^2+1-2z\cos(\varphi+\psi)}{z^2+1-2z\cos(\varphi-\psi)} = \tag{15}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m+1} \frac{\operatorname{sen}(m+1)\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} \frac{\operatorname{sen}(m+1)\psi}{\operatorname{sen}\psi}.$$

Allo stesso sviluppo (15) si perviene ponendo $\lambda = 1$ nella ([12])

$$\frac{1}{[\Gamma(\lambda)]^2 2^{2\lambda-1}} \frac{1}{(z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})^\lambda} Q_{\lambda-1}\left(\frac{1+z^2-2yxz}{2z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{\Gamma(2\lambda+m)} z^m P_m^{(\lambda)}(x) P_m^{(\lambda)}(y).$$

Per $\psi = 0$ abbiamo

$$\lim_{\psi \to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}\psi} \log \frac{z^2+1-2z\cos(\varphi+\psi)}{z^2+1-2z\cos(\varphi-\psi)} = \frac{2^2 z \operatorname{sen}\varphi}{1+z^2-2z\cos\varphi},$$

$$\lim_{\psi \to 0} \frac{\operatorname{sen}(m+1)\psi}{\operatorname{sen}\psi} = m+1,$$

([11]) Cfr. G. SANSONE, op. cit. ([8]), p. 386.

([12]) Cfr. A. OSSICINI, « Bollettino della Unione Matematica Italiana », 1952, Gruppo IV, Serie III, Anno VII, N. 3, p. 318, *Funzione generatrice del prodotto di due polinomi ultrasferici.*

quindi dalla (15) si ha ($|z| < 1$)

$$\frac{1}{1 + z^2 - 2z\cos\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \frac{\operatorname{sen}(m+1)\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} \quad \text{([13])}, \tag{16}$$

che è la funzione generatrice dei polinomi di TCHEBYCHEF di seconda specie.

c) Dalla (1) si possono ottenere altri sviluppi.

Cambiando z in $\sqrt{z}$ e μ in v la (1) diviene

$$J_v(a\sqrt{z})J_v(b\sqrt{z}) =$$

$$= \frac{(ab)^v}{2^{2v}\Gamma(v+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\left(\frac{1}{2}a\right)^{2m}}{m!\,\Gamma(v+m+1)} z^{m+v} F\left(-m, -v-m, v+1, \frac{b^2}{a^2}\right). \tag{17}$$

Se teniamo ora conto delle ([14]), ([15])

$$\int_0^{\infty} e^{-kz} z^{\alpha} dz = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k^{\alpha+1}},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-kz} J_v(a\sqrt{z})J_v(b\sqrt{z})dz = \frac{1}{k} e^{-\frac{a^2+b^2}{4k}} I_v\left(\frac{ab}{2k}\right),$$

dalla (17) si ha

$$\int_0^{\infty} e^{-kz} J_v(a\sqrt{z})J_v(b\sqrt{z})dz =$$

$$= \frac{(ab)^v}{2^{2v}\Gamma(v+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\left(\frac{1}{2}a\right)^{2m}}{m!\,\Gamma(m+v+1)} F\left(-m, -v-m, v+1, \frac{b^2}{a^2}\right) \int_0^{\infty} e^{-kz} z^{m+v} dz,$$

e quindi

$$\frac{1}{k} e^{-\frac{a^2+b^2}{2k}} I_v\left(\frac{ab}{2k}\right) =$$

$$= \frac{(ab)^v}{2^{2v}\Gamma(v+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\left(\frac{1}{2}a\right)^{2m}}{m!\,k^{m+v+1}} F\left(-m, -v-m, v+1, \frac{b^2}{a^2}\right).$$

([13]) Cfr. G. SANSONE, op. cit. ([8]), p. 386.

([14]) Cfr. A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*, (Bologna, 1943), p. 275.

([15]) Cfr. A. GHIZZETTI, op. cit. ([14]), p. 289.

Posto $k=1$, $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1-x}{2}$, $b^2=2z(x-1)$, per la (11) si ha ($|x|\leq 1$)

$$\begin{aligned} &e^{-\frac{z(x-3)}{2}} I_v(z\sqrt{2(1-x)}) = \\ (18)\qquad &= \left(\frac{z}{2}\sqrt{2(1-x)}\right)^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(m+v+1)} P_m^{(v,\,-2v-2m-1)}(x). \end{aligned}$$

Un'altra funzione generatrice relativa ai particolari polinomi di JACOBI $P_m^{(v,\,-2v-2m-1)}(x)$, già determinata in una mia nota precedente ([16]), può ottenersi dalla (18) mediante una trasformazione di LAPLACE.

Infatti poichè ([17])

$$\int_0^\infty e^{-kz} I_v(z) \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{Q_{v-\frac{1}{2}}(k)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}},$$

dalla (18) cambiato z in za e diviso per $\sqrt{z}$ si ha

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z\left[1+\frac{a(x-3)}{2}\right]}}{\sqrt{z}} I_v(za\sqrt{2(1-x)})dz =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2(1-x)}}{2}\right)^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{m+v} P_m^{(v,\,-2v-2m-1)}(x)}{\Gamma(m+v+1)} \int_0^\infty e^{-z} z^{m+v-\frac{1}{2}} dz,$$

e quindi per le (19) e (14)

$$\frac{2^{v+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}(a\sqrt{2(1-x)})^{v+\frac{1}{2}}} Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}\left[\frac{1}{a}+\frac{x-3}{2}\right]\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m+v+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+v+1)} a^m P_m^{(v,\,-2v-2m-1)}(x).$$

([16]) Cfr. A. OSSICINI, op. cit. ([12]), pp. 318-320.
([17]) Cfr. G. N. WATSON, op. cit. ([1]), p. 387.

Posto $z = a$ ed usata la Beta euleriana di prima specie si conclude [18] $|x| \leq 1$ $|z| < \frac{1}{4}$

$$
(20) \qquad \frac{2^{v+\frac{1}{2}}}{(z\sqrt{2(1-x)})^{v+\frac{1}{2}}} Q_{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{2+z[x-3]}{2z\sqrt{2(1-x)}}\right) =
$$

$$
= \sum_{m=0}^{\infty} B\left(m+v+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) z^m P_m^{(v, -2v-2m-1)}(x).
$$