Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Gotusso

Una proprietà delle onde sulla superficie di un liquido.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 36–40.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_36_0>

Una proprietà delle onde sulla superficie di un liquido.

Nota di GUIDO GOTUSSO (a Milano).

Sunto. - *Si dimostra che il moto ondoso naturale del pelo libero di un liquido perfetto avviene in modo che, a parità di sopraelevazione al contorno, in ogni istante il valore medio quadratico della componente orizzontale di accelerazione si scosti il meno possibile dal valore quadratico medio della componente verticale.*

1. Si consideri in un bacino a fondo orizzontale un liquido perfetto. Disposto il piano xy secondo il pelo libero in condizioni di equilibrio e l'asse z secondo la verticale ascendente, supponiamo che in condizioni di moto il pelo libero si sopraelevi di una altezza $\eta = \eta(x, y, t)$ piccola di fronte alla profondità del bacino, e supponiamo altresì il moto lento, così che l'accelerazione coincida con la derivata parziale della velocità v rispetto al tempo:

$$a = \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{1}$$

In queste condizioni, se $\rho =$ costante è la densità del liquido, p la pressione e gz l'energia potenziale per unità di massa dovuta al peso, le equazioni di moto si scrivono così:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{grad}\left(-gz - \frac{p}{\rho}\right) \tag{2}$$

$$\operatorname{div} v = 0 \tag{3}$$

Il moto è dunque irrotazionale, e se $\varphi(x, y, z, t)$ è il potenziale cinetico, dalla (2) integrando si trae:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho} = C(t) \tag{4}$$

mentre la (3) assicura che φ è funzione armonica di x, y, z:

$$\Delta\varphi = 0. \tag{5}$$

Sul pelo libero $z = \eta$ e inoltre p è uguale al valore costante p_0 della pressione atmosferica, così che, conglobando nella funzione φ le costanti e le funzioni del solo tempo, dalla (4) si trae:

$$\eta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{z=\eta} \tag{6}$$

e siccome, essendo η piccolissima di fronte alla profondità del bacino (unica lunghezza assegnata dai dati del problema), porre $z = 0$ nella (6) non comporta sensibile differenza:

$$\eta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{z=0}. \tag{7}$$

Così pure, nel valutare la componente verticale di v al pelo libero, invece di calcolare $z = \eta$ potremo calcolare $z = 0$ e scrivere:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{8}$$

cosicchè le ultime due equazioni scritte danno luogo a:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0}. \tag{9}$$

Riassumendo, il problema è dunque questo: determinare una $\varphi(x, y, z, t)$ in modo che:

$$a)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0} \\[2ex] \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0 \end{array}\right. \qquad 0 \geq z \geq -h$$

Noi supporremo nel seguito $h = \backsim \infty$, per cui basterà semplicemente ritenere $z \leq 0$.

A questo punto la prima osservazione, la più spontanea, è questa: poichè intendiamo studiare un fenomeno superficiale, appare sensato trattare z in modo diverso da x e y nonchè, naturalmente, da t, ponendo:

$$\varphi = \Phi(x, y, t) \cdot Z(z) \tag{10}$$

donde la prima delle a) fornisce subito:

$$Z \cdot \Delta\Phi + Z'' \cdot \Phi = 0 \tag{11}$$

o anche:

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{Z''}{Z}. \tag{12}$$

I due membri della (12), per un classico ragionamento, sono entrambi costanti; questa costante deve essere positiva, affinchè Z, ossia φ, risenta poco l'influenza di z a grande profondità, ossia potremo porre:

$$Z'' - k^4 Z = 0 \tag{13}$$

$$\Delta\Phi + k^4\Phi = 0. \tag{14}$$

Avremo allora, con A, B costanti indeterminate:

$$Z = Ae^{k^2 z} + B^{-k^2 z} \tag{15}$$

e la terza delle (a), ritenendo, come detto, $h = \backsim \infty$, è soddisfatta se

$$B = 0$$

donde, finalmente:

$$\varphi = \Phi(x, y, t)e^{k^2 z} \tag{16}$$

dove Φ soddisfa la (14).

La seconda delle (a) dà poi:

$$k^2\Phi = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \tag{17}$$

e dal confronto della (17) con la (14) segue:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{k}{g}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{18}$$

cioè l'equazione di D'ALEMBERT, come era da aspettarsi, dato che studiamo un moto ondoso.

Precisamente, la (17) mostra che Φ è funzione sinusoidale del tempo con pulsazione $\omega = k\sqrt{g}$, mentre la (18) mostra che Φ è soluzione di una equazione di D'ALEMBERT, e che la velocità di propagazione è $V = \frac{\sqrt{g}}{k}$, donde segue $V\omega = g$.

La particolare soluzione in cui il potenziale cinetico si presenta nella forma (10) costituisce un' « onda »

$$\varphi = e^{k^2 z} \{ \alpha(x, y) \cos \omega t + \beta(x, y) \operatorname{sen} \omega t \} \tag{19}$$

essendo α e β soluzioni delle equazioni:

$$\Delta\alpha + k^4\alpha = 0 ; \qquad \Delta\beta + k^4\beta = 0$$

che soddisfano alle condizioni al contorno.

Data la linearità delle equazioni differenziali, la soluzione generale del problema proposto si ottiene con una serie di onde del tipo (19), ognuna caratterizzata da una particolare costante k e quindi da una particolare pulsazione ω.

2. Limitiamoci a considerare ora la semplice « onda » di potenziale (10), cioè la (19), e dimostriamo per essa un significativo principio variazionale.

Come risultato del confronto della (7) con la (14) segue:

$$\Delta\eta + k^4\eta = 0 \tag{20}$$

ma poichè, come fu altra volta messo in evidenza, [1] se $z = z(x)$ è funzione regolare nel campo σ, l' equazione generale:

$$\Delta z + F'(z) = 0$$

essendo F una funzione qualsiasi implica la stazionarietà di

$$D = \int_\sigma \{ \operatorname{grad}^2 z - 2F(z) \} \, d\sigma,$$

segue che, nel caso nostro, è stazionario:

$$\int_\sigma \{ \operatorname{grad}^2 \eta - k^4\eta^2 \} \, d\sigma. \tag{21}$$

Ora, si noti che:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\right)_{z=0} = -\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{z=0} = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\right)_{z=0} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}\right)_{z=0} \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}\right)_{z=0} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -k^2 g \eta \tag{24}$$

[1] G. GOTUSSO, *Rendiconti Acc. Lincei*, VIII, 10-2-1951.

(l' ultima eguaglianza scende subito dalla (7) e dalla (17)) e pertanto il moto considerato gode della seguente proprietà: a parità di sopraelevazione al contorno, il moto naturale è quello in cui risulta stazionario l' integrale :

$$\int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial v_z}{\partial t}\right)^2_{z=0} \right\} \partial t.$$

Grazie alla (1), a questa proprietà può darsi una formulazione più suggestiva dicendo :

Il moto naturale del pelo libero avviene in modo che in ogni istante il valore della componente orizzontale di accelerazione si scosti, in media quadratica, il meno possibile dal valore della componente verticale [2].