Bollettino
Unione Matematica Italiana

Vittorio Dalla Volta

Sulle superficie di S_n possedenti un doppio sistema coniugato.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 29–36.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_29_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Sulle superficie di S_n possedenti un doppio sistema coniugato.

Nota di VITTORIO DALLA VOLTA (a Roma).

Sunto. - *Si ritrova per via sintetica un teorema sui doppi sistemi coniugati dimostrato per via analitica in un recente lavoro di* C. C. HSIUNG.

1. La presente nota ha la sua origine in un recente lavoro di C. C. HSIUNG (1), nel quale si sviluppa una teoria dei doppi sistemi coniugati (d. s. c.) in uno spazio proiettivo a $n \geq 4$ dimensioni.

(1) C. H. HSIUNG, *A General Theory of Conjugate Nets in Projective Hyperspace,* « Trans. Amer. Math. Soc. », **70** (2), 312-322 (1951). Questo lavoro fu da me recensito per « Mathematical Reviews », (cfr. M. R., **13** (3), 276 (1952)); in tale recensione io ponevo sopratutto l'accento su tre teoremi, uno dei quali (il n. 3) è oggetto della presente nota, i cui

Fra l' altro, l'A. dimostra, per via analitica, il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un d. s. c,, Σ, in S_n ($n \geq 4$) *sia ad invarianti uguali (non nulli), è che per ogni punto* P *della superficie* Φ *sostegno di* Σ *esistano* $\infty^{n(n+3)/2-11}$ *quadriche (di* S_n*) aventi contatto del 2° ordine con le superficie* Φ_1, Φ_{-1}, *trasformate di* LAPLACE *di* Φ, *rispettivamente nei punti* P_1 *e* P_{-1}, *trasformati di* LAPLACE *di* P.

Scopo di questo lavoro è di mostrare come, con considerazioni sintetiche, e senza alcun calcolo, si possa ottenere il risultato di HSIUNG, precisando anzi la natura delle quadriche nominate nell' enunciato; verrà messo in evidenza che ciò che caratterizza i sistemi coniugati a invarianti uguali (non nulli) non è tanto l' esistenza di quadriche soddisfacenti alle condizioni volute, quanto il fatto che tali quadriche dipendono da un numero di parametri *minore* di quello da cui dipendono nel caso generale. Più precisamente dimostrerò il seguente teorema:

Sia S_n *una superficie di* S_n ($n \geq 4$) *dotata di un d. s. c.*, *ad invarianti di* LAPLACE-DARBOUX h, k, *differenti da zero, e siano* Φ_1, Φ_{-1}, *le trasformate di* LAPLACE *di* Φ *nei due versi: allora, detto* P *un punto (regolare) generico di* Φ, *se* $h \neq k$, *esistono* $\infty^{n(n+3)/2-12}$ *quadriche (di* S_n*) che contengono le calotte del 2° ordine di* Φ_1, Φ_{-1}, *aventi i centri rispettivamente in* P_1, P_{-1}, *(ove* P_1, P_{-1} *sono i punti di* Φ_1, Φ_{-1} *provenienti da* P*), e tutte queste quadriche contengono il piano tangente a* Φ *in* P*; in particolare, per* $n = 4$, *si ottengono* ∞^1 *coni, i quali hanno tutti il vertice in* P*; se invece* $h = k$, *e soltanto allora, il numero di tali quadriche si riduce a* $\infty^{n(n+3)/2-11}$ *(ed esse non passano necessariamente per* P*).*

enunciati appaiono in particolare rilievo tipografico, mentre erano intesi invece dall' A. soltanto come applicazioni della sua teoria generale, come risulta da uno scambio di corrispondenza svoltosi fra me e il Prof. HSIUNG. Sempre nella stessa recensione, io elevavo qualche dubbio sulla validità del teorema n. 3, il cui enunciato non mi risultava chiaro, e davo un cenno della dimostrazione che qui presento. Nella corrispondenza di cui sopra, il Prof. HSIUNG ha chiarito il significato del Suo enunciato, che risulta perfettamente esatto, quando per « proper hyperquadric » si intenda una quadrica non passante per il punto x [che nel mio enunciato è indicato come P]. Colgo l' opportunità per correggere un ovvio errore di stampa, cortesemente indicatomi dal prof. HSIUNG, nella citata recensione, ove occorre leggere $n(n+3)/2 - 12$ anzichè $n(n+3) - 12$.

Questioni analoghe, per il caso di $n = 4$, erano già state trattate dallo stesso A. in un precedente lavoro: *Projective Theory of Surfaces and Conjugate Nets in Four-Dimensional Space*, « Amer. Jour. of Math. », **69** (3), 607-621 (1947).

2. Prima di dimostrare il nostro enunciato, e allo scopo di facilitare la lettura di ciò che segue, ricordiamo brevemente alcuni fatti elementari sulle superficie in questione ([2]). Sia Φ una superficie di $S_n (n \geq 3)$; un doppio sistema di linee C_1, C_2 (reale o no), tali che per un punto generico P di Φ passi una e una sola linea di ciascun sistema, si dirà *coniugato* se le tangenti alle linee C_1 (p. es.), uscenti dai punti di una linea C_2, formano una rigata sviluppabile. La relazione fra i due sistemi è reciproca, ed è ben noto che, mentre per $n=3$ esistono infiniti di tali sistemi su ogni superficie, essi *non* esistono, in generale, su una superficie di S_n $(n \geq 5)$; per $n=4$, invece, una superficie può possedere o *un* doppio sistema coniugato, o un sistema di linee asintotiche; in ogni caso, non appena $n \geq 4$, una superficie può possedere al massimo *un* d. s. c., e in tal caso, le coordinate proiettive omogenee x^i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ dei suoi punti sono $n+1$ integrali (linearmente) indipendenti di un' equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, lineare, omogenea, di tipo non parabolico, in due variabili; assunte le linee del d. s. c. come linee u, v, su Φ, l'equazione nominata è della forma

$$\begin{gathered} z_{uv} = c(u, v) z + a(u, v) z_u + b(u, v) z_v \\ (z_u = \partial z/\partial u;\ z_v = \partial z/\partial v;\ z_{uv} = \partial^2 z/\partial u \partial v). \end{gathered} \tag{1}$$

Inversamente, $n+1$ integrali (linearmente) indipendenti di un' equazione del tipo (1) definiscono in S_n una superficie, su cui le linee coordinate u, v, formano un d. s. c. Ovviamente la (1) non è definita dalla Φ poichè le trasformazioni

$$x'^i = \rho(u, v) x^i;\ u' = u'(u);\ v' = v'(v)$$

([2]) La teoria delle superficie con un d. s. c. è stata oggetto di numerosissime ricerche, a partire dalla classica Nota di C. SEGRE, *Su una classe di superficie degli iperspazi legate alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine*, « Atti R. Accad. Torino », 42, 559-591 (1907), seguita da moltissimi lavori di BOMPIANI, TERRACINI, ed altri. Ulteriori indicazioni bibliografiche si possono trovare nell'Appendice III di A. TERRACINI al volume: G. FUBINI - E. ČECH, *Geometria Proiettiva Differenziale degli iperspazi*, Bologna, 1927, T. II, 730-731, come pure nell'edizione francese della stessa opera (G. FUBINI - E. ČECH, *Introduction à la géometrie differentielle des surfaces*, Paris, 1931) e, per i lavori più recenti, in G. BOL: *Projektive Differentialgeometrie*, Göttingen 1950, 301-51. Dei numerosi lavori di E. BOMPIANI sull'argomento cito in particolare, poichè mi occorre nel seguito, quello dal titolo: *Costruzione geometrica delle calotte superficiali in un iperspazio*, « Rend. Acc. Naz. Linc. Cl. Sci. Mat. Fis. Nat. », s. 6, 29, (1), 3-11 (1939).

non mutano Φ, mentre trasformano la (1) in un' equazione della stessa forma, ma con altri coefficienti a, b, c; se però si considerano le espressioni

$$h = c + ab - a_u\,; \quad k = c + ab - b_v\,, \tag{2}$$

esse, per le trasformazioni suddette, si riproducono moltiplicate per uno stesso fattore; quindi le condizioni $h = k$; oppure $hk = 0$ hanno necessariamente un significato geometrico, su cui ritorneremo fra breve; h e k sono gl' *invarianti di* LAPLACE-DARBOUX della (1), o del d. s. c. da essa definito.

Si consideri ora, p. es., la sviluppabile delle tangenti alle linee $v(u = \text{cost.})$ uscenti dai punti di una linea u, e il suo spigolo di regresso Γ_1; al valore della linea u, Γ_1 descrive, almeno in generale, una superficie Φ_1: *la (prima) trasformata di* LAPLACE *di* Φ *nel verso delle linee* v; in modo del tutto analogo si definisce una superficie Φ_{-1}, *(prima) trasformata di* LAPLACE *di* Φ *nel verso delle linee* u; è da notare che se, e solo se, $hk \neq 0$, Φ_1 e Φ_{-1} sono effettive superficie (non degeneri cioè in curve o, addirittura, in punti). Abbiamo così il significato geometrico della condizione $hk = 0$. È ancora notissimo che Φ_1 e Φ_{-1} ammettono anch' esse un d. s. c.; e anzi quando P su Φ descrive una linea u, il corrispondente punto P_1 di Γ_1 descrive su Φ_1 una delle linee del d. s. c., che risulta così una linea u; l' altro sistema è costituito dalle curve Γ_1. Infine, benchè non necessario per il seguito, ricordo che la Φ stessa è trasformata di LAPLACE sia di Φ_{-1} (nel verso delle linee v) che di Φ_1 (nel verso delle linee u), e che si può così costruire una successione (eventualmente finita) di trasformate di LAPLACE.

Dalla definizione delle Φ_1, Φ_{-1}, risulta ovvio che il piano π tangente a Φ in un punto P è piano osculatore in P_1 alla linea Γ_1 per esso, e in P_{-1} alla linea Γ_{-1} (definita in modo analogo alla Γ_1) che vi passa; possiamo perciò considerare, in π, *la* conica γ_1 tangente a Γ_{-1} in P_{-1} e contenente l' E_2 di Γ_1 uscente da P_1, e *la* conica γ_{-1} tangente a Γ_1 in P_1, e per l' E_2 di Γ_{-1} uscente da P_{-1}; *tali coniche coincidono se, e soltanto se,* h = k. (Teorema di KOENIGS) [3].

[3] Per una dimostrazione proiettiva del teorema di KOENIGS, v. E. BOMPIANI: ***Risoluzione geometrica del problema di Moutard sulla costruzione delle equazioni di Laplace ad integrale esplicito***, « Rend. Acc. Naz. Linc. Cl. Sci. Mat. Fis. Nat. s. 5, 24 (1), 190-197 (1915). V. In particolare il n. 6 a pag. 193.

Converrà ancora ricordare che una superficie Φ contenente *un solo* d. s. c. — e soddisfacente quindi ad *un'unica equazione* di LAPLACE (il che implica $n > 3$) — è tale che lo S 2–osculatore in un suo punto generico P (contenente cioè gli E_2 di Φ di centro P) è uno S_4, Σ, per il piano π tangente a Φ in P. I piani osculatori a curve di Φ uscenti da P e aventi in comune un E_1 fissato riempiono un S_3 (di Σ) per π, S $(2-1)$*–osculatore* relativo a quell'E_1, o alla sua tangente. Inversamente ogni S_3 di Σ per π è $(2-1)$–osculatore per *due* tangenti, che variano nell'involuzione I, di cui le tangenti coniugate sono rette doppie; e vi è corrispondenza proiettiva fra il fascio degli S_3 di Σ per π e le coppie di I. Risulta da ciò subito che ogni ipersuperficie V (di S_n) per π, ma non per Σ, taglia Φ in una curva che ha in P un punto doppio, le cui tangenti sono coniugate in I; esse sono quelle per cui lo S $(2-1)$–osculatore è lo S_3 comune a Σ e all' iperpiano tangente in P a V. In particolare, *se* V *è una quadrica, essa contiene una tale coppia.*

È pure noto che ogni calotta superficiale (regolare) del 2° ordine, qualunque sia la dimensione del suo S 2–osculatore (che è al più un S_5), è individuata da *tre* suoi E_2 generici; ma, *nel caso particolare delle superficie con un d. s. c., bastano due* E_2, *purchè si sappia che devono appartenere alle linee del sistema coniugato* [4].

[4] Tale fatto non deve stupire; esso trova il suo analogo in S_3 euclideo ove, come è ben noto, una calotta del 2° ordine è individuata dai suoi raggi principali di curvatura, cioè da *due* suoi elementi, che però sono coniugati (e ortogonali). Nel lavoro di BOMPIANI citato in [2] si dà, fra l'altro, la costruzione effettiva per una calotta σ con doppio sistema coniugato in S_4 a partire da tre suoi elementi generici. Seguendo una via del tutto analoga a quella del BOMPIANI, sono riuscito a dare la costruzione a partire dai due elementi del sistema coniugato; ometto i calcoli, che non presentano alcuna difficoltà, per enunciare solamente il risultato. Siano E_2', E_2'' i due elementi assegnati, in S_4, con lo stesso centro P, tangenti t' e t'', e piani osculatori π', π''; detto π il piano $t't''$ (tangente a σ in P) sono noti gli spazi $\Sigma' \equiv \pi \cdot \pi'$; $\Sigma'' \equiv \pi \cdot \pi''$, spazi $(2-1)$-osculatori rispettivamente per t', t''; è nota anche l'involuzione I, di rette doppie t', t''. Si consideri ora una tangente qualsiasi t (distinta da t', t''); il luogo delle rette incidenti t, e dalle quali i due elementi assegnati sono proiettati l'uno sull'altro è un S_3, Σ, per π; *ebbene, il coniugato armonico di* Σ *dopo* Σ', Σ'', *è lo* S_3, Σ, $(2-1)$*-osculatore relativo alla tangente* t *(e alla sua corrispondente in* I). Determinati così i piani osculatori degli E_2 di σ, occorre costruire gli E_2. A tale scopo si fissi un piano osculatore, e si consideri una retta generica r appoggiata alla tangente di uno degli elementi dati, p. es. t', e appartenente a Σ'; *il cono proiettante* E_2'' *da* r *sega il piano dato nell'* E_2 *di* σ *avente quel piano come osculatore.*

3. Passiamo ora finalmente a dimostrare l'enunciato voluto: come si è visto nel n. prec., fra gli E_2 di Φ_1 uscenti da P_1 ve ne è uno, E_2', che ha come piano osculatore $\pi \equiv (P, P_1, P_{-1})$; così vi è un E_2 di Φ_{-1} uscente da P_{-1}, sia E_2'', che ha lo stesso piano osculatore. Ora, risulta subito dal n. 2 che *ogni quadrica contenente la calotta del 2° ordine di* Φ_1 *avente centro in* P_1 *e che diremo* σ_1, *deve necessariamente toccare* Φ_1 *in* P_1, *contenere una coppia dell'involuzione* I, *e i due* E_2 *del d. s. c. di* Φ_1 *uscenti da* P_1, *uno dei quali è* E_2'; *e inversamente, ogni quadrica soddisfacente a tali proprietà contiene* σ_1. In tale maniera si ottengono *sei* condizioni, *certamente indipendenti*, come subito si vede. Ragionando in modo analogo per la calotta σ_{-1} di Φ_{-1} di centro P_{-1}, si ottengono, per le quadriche contenenti σ_1 e σ_{-1}, dodici condizioni. Dimostreremo al n. successivo che fra queste, *undici* sono certamente indipendenti (almeno se Φ non soddisfa a particolari proprietà, il che noi escludiamo), l'unico dubbio potendo sussistere per le condizioni relative ad E_2', E_2''; accettando provvisoriamente tale risultato, distinguiamo i due casi $h \neq k$; $h = k$. Nella prima ipotesi, per il teorema di Koenigs (n. 2), E_2' ed E_2'' *non* appartengono alla stessa conica, e *quindi le dodici condizioni sono indipendenti*; si hanno quindi $\infty^{n(n+3)/2-12}$ quadriche soddisfacenti al problema; ma ognuna di esse è ovviamente segata dal piano π secondo le *due* coniche γ_1, γ_{-1}, (distinte appunto perchè $h \neq k$), e quindi contiene tale piano. Ne segue che, per $n = 4$, le quadriche in questione sono tutte *coni*, col vertice V su π. Per dimostrare che $V \equiv P$, osserviamo che tutti questi (∞^2) coni hanno necessariamente come S_3 tangente in P, lo S_3 individuato da π e dal piano π_1 tangente a Φ_1 in P_1; poichè tale S_3 è, come subito si vede, $(2-1)$-osculatore relativo alla tangente PP_1 (che è una delle tangenti coniugate dl Φ_1), esso, in base all'osservazione del penultimo periodo del n. 2, deve contenere la coniugata di PP_1 nell'involuzione *I*, cioè la PP_1 stessa; ma da ciò risulta subito che il vertice V di tutti i nostri coni deve stare sulla retta PP_1; poichè, con ragionamento del tutto simile, si prova che esso deve stare anche sulla $P_{-1}P$, ne risulta $V \equiv P$, c. v. d. Se invece $h = k$, le coniche γ_1, γ_{-1} coincidono, ed *ogni* quadrica per E_2' (p. es.) e tangente ad E_2'', contiene necessariamente E_2''. In tal caso, dunque, le condizioni si riducono ad *undici* indipendenti, e si ottengono $\infty^{n(n+3)/2-11}$ quadriche, che *non* passano necessariamente per P, nè tanto meno sono coni.

Osservazioni: *a*) È evidente che il teorema non può sussistere per $n = 3$, perchè il numero delle condizioni imposte alle quadriche è maggiore del numero dei parametri da cui dipendono le quadriche di S_3;

b) L' ipotesi che gl' invarianti h e k siano differenti da zero è essenziale per assicurare l' esistenza stessa delle calotte σ_1 e σ_{-1}.

4. Resta ormai solamente da provare l' indipendenza delle undici condizioni di cui al n. 3 (5). Abbiamo già mostrato che le sei condizioni relative a una sola calotta sono certamente indipendenti; poichè, però, σ_1 e σ_{-1} *non* sono calotte generiche, potrebbe sorgere il dubbio che il passaggio per una di esse portasse *sempre* limitazioni alle quadriche che devono contenere l' altra; ciò che è giustificato dal caso degli invarianti uguali. Per rimuovere però completamente ogni dubbio, faremo vedere che è possibile imporre alle quadriche per σ_1 (p. es.) successivamente tutte le condizioni relative a σ_{-1}, prese in un ordine opportuno, senza che mai accada che, imponendo una delle condizioni, qualcuna delle successive venga automaticamente soddisfatta. Farà necessariamente eccezione, naturalmente, la condizione relativa alla tangente ad E_2'' la quale, come si è visto, può portare come conseguenza il passaggio per E_2''.

Tenendo conto del n. 3, e della genericità del punto P su Φ, potremo anzitutto supporre che — poichè $n > 3$ — i piani π_1 e π_{-1} (che sono osculatori alle linee del d. s. c. uscenti da P) abbiano a comune il *solo punto* P, e inoltre che non abbiano a comune una retta i due piani osculatori ai due elementi $\overline{E}_2'$, $\overline{E}_2''$, uscenti rispettivamente da P_1, e P_{-1}, e appartenenti alle linee distinte da Γ_1, Γ_{-1}, dei due sistemi coniugati esistenti su Φ_1, Φ_{-1}. Facciamo altresì l' osservazione, pressochè banale, che ogni quadrica (anche spezzata), tangente a una calotta (regolare) del 2° ordine (nel suo centro), e passante per il piano tangente alla calotta, *va riguardata come contenente l' intera calotta.*

Ciò premesso, consideriamo le seguenti quadriche:

1) Q_1 spezzata in un iperpiano generico Σ per π_1, ma non per P_{-1}, e in un iperpiano Σ_1 generico per P_1, ma non per P_{-1} (nè per P);

2) Q_2 spezzata in Σ e in un iperpiano Σ_2 per P_{-1} e P_1, ma non per la tangente $\overline{t}''$ ad $\overline{E}_2''$, nè per P;

(5) Tale indipendenza si può provare naturalmente per via analitica, come fa il HSIUNG nei due lavori citati in (1). Osservo però che i relativi calcoli si possono semplificare di molto, in base all' osservazione che i due S_4 2-osculatori a Φ_1, Φ_{-1}, in P_1, P_{-1}, hanno a comune il piano π e quindi stanno al più in un S_6 (che è, come si vede facilmente, lo spazio 3-osculatore a Φ in P); e si può quindi senz' altro supporre che lo spazio ambiente sia di dimensione ≤ 6.

3) Q_3 spezzata in Σ e in un iperpiano Σ_3 per P_{-1}, P_1, $\bar{t}''$, ma non per il piano $\bar{\pi}''$ osculatore ad $\bar{E}_2''$, nè per P (ciò che è possibile perchè $n > 3$, come è facile vedere);

4) Q_4 spezzata in Σ e in un iperpiano Σ_4 per P_{-1}, P_1, $\bar{\pi}''$, ma non per P (e anche questo è possibile perchè π_1, π_{-1} hanno solo P a comune);

5) Q_5 spezzata nell' iperpiano Σ_4 e in un iperpiano passante per π_1 e π.

Ora, per il modo stesso come sono state costruite, tutte queste quadriche passano per π_1 e hanno P_1 come punto doppio; *esse dunque contengono tutte* σ_1; ma Q_1 non contiene P_{-1}, Q_2 passa per P_{-1} senza toccare alcun E_2 di σ_{-1}, Q_3 è tangente ad E_2'', ma non a $\bar{E}_2''$, Q_4 contiene $\bar{E}_2''$, ma non è tangente ad E_2''; infine, Q_5 contiene $\bar{E}_2''$, è tangente ad E_2'' e, anzi, contiene tutto E_2'' — ciò che però non disturba il nostro ragionamento, appunto perchè il passaggio per E_2'' *può* essere conseguenza della tangenza — e *non* contiene σ_{-1}, come subito si vede osservando che Q_5 contiene solo *due* rette del piano tangente a σ_{-1}. E con ciò tutto rimane provato.