Bollettino Unione Matematica Italiana

Mauro Picone

Una semplicissima formola di maggiorazione per i polinomi di Legendre e per le loro derivate.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 1–2.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Una semplicissima formola di maggiorazione per i polinomi di Legendre e per le loro derivate (*).

Nota di Mauro Picone (a Roma).

Sunto. - *Si dimostra che per la derivata* k^{ma} ($k = 1, 2, \dots, n$) *del polinomio di* Legendre $X_n(z)$, *di grado* n, *nella variabile complessa* z, *sussiste, in tutto il piano, la formola di maggiorazione*

$$| X_n^{(k)}(z) | \leq (n,\ k) q_n(| z | + 1)^{n-k},$$

ove

$$(n,\ k) \begin{cases} = n(n-1) \dots (n-k+1), & per \quad k \geq 1 \quad e \quad n \geq 1, \\ = 1, & per \quad k = 0, \end{cases}$$

$$q_0 = 1, \qquad q_n = \frac{(2n-1)\,!\,!}{n\,!} = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1}{n\,!}, \qquad per \quad n \geq 1.$$

La relazione (v. il sunto)

$$| X_n^{(k)}(z) | \leq (n,\ k) q_n(| z | + 1)^{n-k},$$

del tutto ovvia per $n = 0$ e per $n = 1$, qualunque valore abbia k, sarà dimostrata in generale se se ne constata la validità per i polinomi di Legendre di grado $n + 1$, qualora si supponga verificata per quelli di grado non superiore a n e per qualsivoglia k. Ora, in tale ipotesi, dalle note formole

$$(n+1) X_{n+1} = (2n+1) z X_n - n X_{n-1},$$
$$(n+1) X_{n+1}^{(k)} = (2n+1)(z X_n^{(k)} + k X_n^{(k-1)}) - n X_{n-1}^{(k)},$$

posto $| z | = \rho$, segue

$$(2) \qquad (n+1) | X_{n+1}^{(k)} | (\rho + 1)^{k+1-n} \leq$$
$$(2n+1)[(n,\ k) q_n(\rho^2 + \rho) + (n,\ k-1) q_n(\rho + 1)^2] + (n-1,\ k) n q_{n-1}$$

e sarà pertanto dimostrata la (1) per il polinomio di Legendre

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

di grado $n+1$, se si verifica che il secondo membro della (2) non è mai superiore, per qualsivoglia valore di ρ, alla funzione

$$(n+1,\ k)(n+1)q_{n+1}(\rho+1)^2.$$

Ciò segue dal fatto che la differenza fra questa funzione e quella al secondo membro della (2) è la funzione, lineare in ρ,

$$(n,\ k)(2n+1)q_n\cdot\rho+(n,\ k)[(2n+1)q_n-(n-k)q_{n-1}],$$

i cui coefficienti non sono negativi, alla quale subito si perviene, tenendo conto delle identità

$$(n+1)q_{n+1}=(2n+1)q_n,$$
$$(n+1,\ k)=(n,\ k)+(n,\ k-1)k.$$

È da osservare che essendo $(n,\ k)q_n$ il coefficiente della più alta potenza di z nel polinomio $X_n^{(k)}(z)$, in una formola di maggiorazione del tipo

$$|X_n^{(k)}(z)|\leq q_{nk}^{(0)}\,|z|^{n-k}+q_{nk}^{(1)}\,|z|^{n-k-1}+\ldots+q_{nk}^{(n-k)},$$

che debba valere in un insieme il cui derivato contenga il punto ∞, il minimo valore che può avere il coefficiente $q_{nk}^{(0)}$ è appunto quello del coefficiente della formola (1).