Bollettino
Unione Matematica Italiana

Jaurès Cecconi

Confronto fra recenti definizioni di variazione totale per trasformazioni piane.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 10–19.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_10_0>

Confronto fra recenti definizioni di variazione totale per trasformazioni piane.

Nota di JAURÈS CECCONI (a Pisa).

Sunto. - *Si confronta una definizione di variazione totale, recentemente proposta da* H. OKAMURA, *con quella di* L. CESARI *e* T. RADÒ.

1. Recentemente H. OKAMURA [8] ha proposto una definizione di variazione totale per una trasformazione piana continua della quale si è servito in una ricerca sul Teorema di GAUSS-GREEN.

Nel presente lavoro mi propongo di confrontare questa definizione con quella usata da L. CESARI [3] e T. RADÒ [7] nelle loro ricerche sull'area secondo LEBESGUE delle superficie di FRECHÈT.

2. Sia $Q \equiv [0 \leq u, v \leq 1]$ il quadrato unitario del piano uv, sia

$$(T,\ Q): \qquad x = x(u,\ v), \qquad y = y(u,\ v), \qquad (u,\ v) \in Q$$

una trasformazione continua di Q nel piano xy.

Sia C un ciclo 1-dimensionale appartenente a Q e $T(C)$ il ciclo continuo immagine di C secondo la trasformazione continua (T, Q).

Sia $P(x, y)$ un punto del piano xy non appartenente all'insieme $T(C)$.

Indichiamo con $O(P, T, C)$ l'indice topologico del punto P rispetto al ciclo continuo $T(C)$ [1], cioè il numero algebrico delle intersezioni che una semiretta con origine in P ha con ogni ciclo costituente una approssimazione simpliciale di $T(C)$ sufficientemente vicina a (T, C).

Sia δ un insieme aperto appartenente a Q e sia P un punto del piano xy non appartenente all'insieme $T(\delta^*)$ immagine secondo (T, Q) della frontiera δ^* di δ.

In virtù di noti risultati di teoria degli insiemi [4] è possibile costruire una successione di simplessi $\{\tau_n\}$ positivi non degeneri privi a due a due di punti interni in comune in modo che sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = \delta,$$

ed inoltre ogni insieme chiuso appartenente a δ appartenga ad un numero finito di simplessi τ_n.

Indichiamo con $A(P, T, \delta)$ l'indice di BROUWER del punto P rispetto a $T(\delta)$ [1], [5], cioè l'indice topologico rispetto al ciclo $T(\sigma_n)$ costituente l'immagine secondo (T, Q) di un qualsiasi ciclo σ_n contorno di un sistema di simplessi τ_n (positivi e di molteplicità 1) ricoprente l'insieme dei punti di δ che ha da δ^* distanza sufficientemente piccola.

Ricordiamo anche le seguenti proprietà dei numeri $O(P, T, C$ e $A(P, T, \delta)$:

1) Se δ_1 e δ_2 sono due insiemi aperti appartenenti a δ privi a due a due di punti in comune, tali che sia $\delta \subset \delta_1 + \delta_1^* + \delta_2 + \delta_2^*$, e se $P \overline{\in} T(\delta_1^*) + T(\delta_2^*)$ allora

$$A(P, T, \delta) = A(P, T, \delta_1) + A(P, T, \delta_2).$$

2) Se è $A(P, T, \delta) \neq 0$ allora esiste almeno un punto $Q \equiv (u, v) \in \delta$ per il quale è $T(Q) = P$.

3) Se δ è un campo poligonale, cioè l'insieme dei punti che sono interni ad una linea poligonale semplice chiusa ed esterni ad un numero finito di linee poligonali semplici chiuse ([1]) allora $A(P, T, \delta)$ è uguale all'indice topologico di P rispetto al ciclo continuo immagine secondo (T, Q) del ciclo costituente la frontiera positiva di δ.

3. Richiamo brevemente in questo numero il concetto di variazione limitata usato da L. CESARI e T. RADÒ (tale concetto sarà brevemente indicato nel seguito con B. V.).

Sia $\pi[R]$ un poligono semplice [una regione poligonale] appartenente a Q. sia $P \equiv (x, y)$ un punto del piano xy e sia $O(x, y; T, \pi)$ $[O(x, y; T, R)]$ l'indice topologico di P rispetto al ciclo continuo immagine secondo (T, Q) del ciclo costituente il contorno orientato positivamente $\pi^*[R^*]$ di $\pi[R]$, se $(x, y) \overline{\in} T(\pi^*)[T(R^*)]$; sia zero altrimenti.

Sia $o(x, y; T, \pi)$ la funzione indice così definita: $o(x, y; T, \pi) = 1$ se $O(x, y; T, \pi) \neq 0$, uguale a zero altrimenti.

Sia $\sigma_r[\sigma_R]$ un gruppo di poligoni semplici $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ [regioni poligonali $R_1, R_2, \dots, R_n$] appartenenti a Q privi a due a due di punti interni in comune.

Considero secondo L. CESARI e T. RADÒ [2], [7] le funzioni di molteplicità

$$\Psi(x, y; T, Q) = \text{ext}_{\sigma_r}. \sup. \Sigma\, O(x, y; T, \pi_i)$$
$$\Psi^*(x, y; T, Q) = \text{ext}_{\sigma_R}. \sup. \Sigma\, O(x, y; T, R_i)$$

([1]) Un poligono π può essere eventualmente pensato come una regione poligonale R che ha un solo contorno.

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutti i possibili gruppi σ_r e σ_R rispettivamente. Queste funzioni sono misurabili nel piano xy.

Si dice variazione totale secondo L. CESARI e T. RADÒ della trasformazione (T, Q) il numero positivo, eventualmente $+\infty$,

$$W(T, Q) = \iint \Psi(x, y; T, Q) dx dy,$$

l'integrale essendo preso su di un quadrato del piano xy che contiene l'insieme $T(Q)$.

Si dice infine che (T, Q) è a variazione limitata secondo L. CESARI e T. RADÒ se $W(T, Q)$ è finito.

Ricordo inoltre il risultato di T. RADÒ [8] secondo il quale, quasi ovunque nel piano xy si ha

$$\Psi(x, y; T, Q) = \Psi^*(x, y; T, Q).$$

4. Espongo in questo numero la definizione di variazione totale di H. OKAMURA.

Sia (T, Q) la trasformazione continua considerata nel n. 2.

Sia δ un insieme aperto appartenente a Q.

Sia $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ un gruppo di insiemi aperti appartenenti a Q, privi a due a due di punti in comune e tali che $Q \subset \sum_{i=1}^{n} (\delta_i + \delta_i^*)$.

Dirò che un siffatto gruppo di insiemi aperti costituisce una suddivisione di Q; dirò che questa suddivisione è ammissibile per la trasformazione (T, Q) se inoltre è

$$\left| \sum_{i=1}^{n} T(\delta_i^*) \right| = 0.$$

Sia, per ogni $P \equiv (x, y)$ appartenente al piano xy, $A(x, y; T, \delta)$ l'indice di BROUWER della trasformazione (T, δ) rispetto ad (x, y) se $(x, y) \overline{\in} T(\delta^*)$, sia zero altrimenti. La funzione $A(x, y; T, \delta)$ è misurabile nel piano xy.

Sia K un quadrato del piano xy contenente l'insieme $T(Q)$ nel suo interno.

Sia

$$V(\delta) = \left| \iint_K A(x, y; T, \delta) dx dy \right|$$

se la funzione $A(x, y; T, \delta)$ è integrabile secondo LEBESGUE nel quadrato K, sia $V(\delta) = +\infty$ altrimenti.

La trasformazione (T, Q) sarà detta a variazione limitata secondo H. OKAMURA (brevemente B. V. H.) se *a*) comunque si fissi $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione di Q ammissibile per (T, Q) sia essa $[\delta_i\,;\ i = 1, 2\,; \ldots, n]$ per la quale risulta

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{diam} \delta_i < \varepsilon,$$

b) esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni suddivisione di Q, ammissibile per (T, Q), si abbia

$$\sum_{i=1}^{n} V(\delta_i) < M.$$

Se (T, Q) è B. V. H. dicesi variazione totale di (T, Q) il numero finito

$$\overline{W}(T, Q) = \text{ext. sup.} \sum_{i=1}^{n} V(\delta_i),$$

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutte le suddivisioni di Q ammissibili per (T, Q).

5. Riporto anche il seguente risultato di H. OHAMURA.

TEOREMA. – Sia $[\delta_i^{(n)}\,;\ i = 1, 2, \ldots, \mu_n]$ una successione di suddivisioni di Q ammissibili per (T, Q) per la quale risulti

$$\lim_{n \to \infty} [\max_{i=1,2,\ldots,\mu_n} \operatorname{diam} \delta_i^{(n)}] = 0.$$

Possiamo supporre che se $s > n$ ogni $\delta_j^{(s)}$ appartenga a qualche $\delta_i^{(n)}$.

Allora esiste quasi ovunque su K il

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\mu_n} |A(x, y\,;\ T, \delta_i^{(n)})| = \alpha(x, y\,;\ T, Q) \tag{2}$$

e si ha

$$\overline{W}(T, Q) = \iint_K \alpha(x, y\,;\ T, Q)dxdy.$$

6. Dimostro che se (T, Q) è B. V. H. essa è anche B. V..

Sia $[\delta_i^{(n)}\,;\ i = 1, 2, \ldots, \mu_n\,;\ n = 1, 2, \ldots]$ la successione di suddivisioni di Q considerata nel n. precedente, sia I l'insieme di misura nulla di K

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{i=1}^{\mu_n} T(\delta_i^{(n)*})],$$

e sia I' l'insieme di misura nulla di K in cui non esiste il limite (2).

Sia $(x, y) \in T(Q) - I - I'$ e si abbia $\Psi^*(x, y; T, Q) \geq m$.

In virtù di un noto risultato di T. Radò [7] esistono allora almeno m continui modelli di (x, y), siano $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$, dotati della proprietà che ogni intorno di γ_s; $s = 1, 2, \dots, m$; contiene una regione poligonale R_s contenente γ_s per la quale risulta

$$O(x, y; T, R_s) \neq 0.$$

Osserviamo anzi che in virtù delle ipotesi ciascuno dei continui γ_s è ridotto ad un punto H_s.

Consideriamo per ogni intero s; $s = 1, 2, \dots, m$; un insieme aperto $\delta_s^{(\nu)}$ [2] della successione $[\delta_i^{(n)}; i = 1, 2, \dots, \mu_n; n = 1, 2, \dots]$ che contenga H_s nel suo interno ed appartenga a $R_s^{(0)}$ [3].

Si avrà per l'additività dell'indice di Brouwer (n. 2) e poichè $(x, y) \overline{\in} T(\delta_s^{(\nu)*})$, $(x, y) \overline{\in} T(R_s^*)$,

$$A(x, y; T, R_s^{(0)}) = A(x, y; T, \delta_s^{(\nu)}) + A(x, y; T, R_s^{(0)} - \bar{\delta}_s^{(\nu)}).$$

Vogliamo affermare che è $A(x, y; T, \delta_s^{(\nu)}) \neq 0$, oppure che esiste in $R_s^{(0)} - \bar{\delta}_s^{(\nu)}$ un insieme aperto $\delta_j^{(r)}$; $r > \nu$; della successione $[\delta_i^{(n)}; i = 1, 2, \dots, \mu_n; n = 1, 2, \dots]$ per cui è $A(x, y; T, \delta_j^{(\nu)}) \neq 0$, in modo che risulti, in virtù delle definizioni, $\alpha(x, y; T, Q) \geq \Psi^*(x, y; T, Q)$.

Ove fosse $A(x, y; T, \delta_s^{(\nu)}) = 0$ sarebbe allora $A(x, y; T, R_s^{(0)} - \delta_s^{(\nu)}) \neq 0$ poichè si ha

$$A(x, y; T, R_s^{(0)}) = O(x, y; T, R_s) \neq 0$$

in virtù delle relazioni che intercorrono fra l'indice topologico e l'indice di Brouwer (n. 2).

Diciamo $[\gamma_j^{(\nu+1)}; j = 1, 2, \dots, \bar{\mu}_{\nu+1}]$ gli insiemi aperti in cui $R_s^{(0)} - \bar{\delta}_s^{(\nu)}$ è suddiviso dagli insiemi aperti $[\delta_i^{(\nu+1)}; i = 1, 2, \dots, \mu_{\nu+1}]$. Si ha

$$A(x, y; T, R_s^{(0)} - \bar{\delta}_s^{(\nu)}) = \sum_j A(x, y; T, \gamma_j^{(\nu+1)}),$$

per cui uno almeno dei termini della somma, sia $A(x, y; T, \gamma^{(\nu+1)})$, è diverso da zero.

Se l'insieme $\gamma_s^{(\nu+1)}$ non appartiene al gruppo $[\delta_i^{(\nu+1)}; i = 1, 2, \dots, \mu_{\nu+1}]$ allora esso incontra la frontiera R_s^* di R_s.

Se diciamo $\gamma_j^{(\nu+2)}$; $j = 1, 2, \dots, \bar{\mu}_{\nu+2}$ gli insiemi in cui $\gamma_s^{(\nu+1)}$ è suddiviso dagli insiemi aperti del gruppo $[\delta_i^{(\nu+2)}; i = 1, 2, \dots, \mu_{\nu+2}]$ sarà

$$A(x, y; T, \gamma_s^{(\nu+1)}) = \sum_j A(x, y; T, \gamma_j^{(\nu+2)})$$

ed uno almeno dei termini della somma sarà diverso da zero.

(2) L'intero ν dipenderà generalmente da s.

(3) Se G è un insieme, $G^{(0)}$ indica l'insieme dei punti interni a G, $\bar{G}$ indica la chiusura di G.

Neghiamo allora la tesi e proseguiamo indefinitivamente in questa operazione.

Poichè per ogni intero $p > 0$ esiste un insieme $\gamma_s^{(\nu+p)}$ per il quale si ha $A(x, y; T, \gamma_s^{(\nu+p)}) \neq 0$ questo insieme deve almeno contenere un modello di (x, y); inoltre $\gamma_s^{(\nu+p)}$ incontra R_s^*. Poichè d'altra parte il diametro di $\gamma_s^{(\nu+p)}$ tende a zero al tendere di p all'infinito avremmo che (x, y) appartiene all'immagine di R_s^* secondo (T, Q). E ciò contrasta con il fatto che $O(x, y; T, R_s) \neq 0$.

7. Proviamo in questo numero che se (T, Q) è B. V. H. allora è quasi ovunque su $T(Q)$

$$\alpha(x, y; T, Q) = \Psi^*(x, y; T, Q)$$

e quindi che le variazioni totali secondo L. CESARI e H. OKAMURA coincidono.

In virtù di quanto abbiamo veduto nel n. precedente basterà provare soltanto che quasi ovunque su $T(Q)$ si ha

$$\Psi^*(x, y; T, Q) \geq \alpha(x, y; T, Q).$$

Sia $[\delta_i^{(n)}; i = 1, 2, ..., \mu_n; n = 1, 2, ...]$ la successione di suddivisioni ammissibili per $(T. Q)$ considerata nel n. 5, sia per un punto (x, y) in cui $\alpha(x, y; T, Q)$ è definita e per un valore di m

$$\alpha(x, y; T, Q) \geq m.$$

Allora esiste un intero ν tale che della suddivisione $[\delta_i^{(\nu)}; i = 1, 2, ..., \mu_\nu]$ di Q ammissibile per (T, Q) ad esso corrispondente fanno parte μ insiemi aperti $\overline{\overline{\delta}}_1, \overline{\overline{\delta}}_2, ... \overline{\overline{\delta}}_\mu$; $\mu \leq m$; per ciascuno dei quali è

$$A(x, y; T, \overline{\overline{\delta}}_i) \neq 0,$$

ed è anche

$$m \leq \sum_{i=1}^{\mu} | A(x, y; T, \overline{\overline{\delta}}_i) | .$$

Vogliamo provare che per ogni $\overline{\overline{\delta}}_i$ esiste un numero finito di regioni poligonali R_{is}; $s = 1, 2, ..., l_i$; prive a due a due di punti in comune tali che

$$A(x, y; T, \overline{\overline{\delta}}_i) = \sum_{s=1}^{l_i} A(x, y; T, R_{is}^{(0)})$$

e quindi anche

$$A(x, y; T, \overline{\overline{\delta}}_i) = \sum_{s=1}^{l_i} O(x, y; T, R_{is}).$$

Sia d_i la distanza che il punto (x, y) ha dall'insieme chiuso $T(\overline{\overline{\delta}}_i^*)$.

In virtù della continuità di (T, Q) e di note proprietà della teoria degli insiemi esiste un gruppo di regioni poligonali R_{is}, appartenenti a $\overline{\overline{\delta}}_i$, tali che l'immagine secondo (T, Q) dell'insieme aperto $\overline{\overline{\delta}}_i - \sum_s \overline{R}_{is}$ ha da (x, y) distanza $> \frac{d_i}{2}$.

In virtù della additività dell'indice di BROUWER si ha

$$A(x, y; T, \overline{\overline{\delta}}_i) = A(x, y; T, \sum_s R_{is}{}^{(0)}) + A(x, y; T, \overline{\overline{\delta}}_i - \sum_s \overline{R}_{is}).$$

Ma il punto (x, y) non appartiene all'insieme $T(\overline{\overline{\delta}}_i - \sum_s \overline{R}_{is})$ e perciò

$$A(x, y; T, \overline{\overline{\delta}}_i - \sum_s \overline{R}_{is}) = 0,$$

e quindi

$$A(x, y; T, \overline{\overline{\delta}}_i) = A(x, y; T, \Sigma R_{is}{}^{(0)}) = \sum_s A(x, y; T, R_{is}{}^{(0)}) = \sum_s O(x, y; T, R_{is}).$$

In virtù della definizione di $\Psi^*(x, y; T, Q)$ si ha allora

$$m \leq \sum_i | A(x, y; T, \overline{\overline{\delta}}_i) | = \sum_i | \sum_s O(x, y; T, R_{is}) \leq$$
$$\leq \sum_i \sum_s | O(x, y; T, R_{is}) | \leq \Psi^*(x, y; T, Q),$$

il nostro asserto è così provato.

8. In questo numero espongo un esempio di una trasformazione piana che è B. V. senza essere B. V. H..

Allo scopo considero una linea semplice chiusa di JORDAN γ che occupi un insieme di misura positiva del piano xy. La linea γ può perciò pensarsi come l'immagine biunivoca e bicontinua del contorno Q^* del quadrato Q.

In virtù di un noto risultato di SCHOENFLIES [4] si può prolungare questa corrispondenza biunivoca e bicontinua fino agli interni di Q^* e di γ.

Essa è B. V. poichè è ovviamente, per ogni $(x, y) \in T(Q)$, $\Psi(x, y; T, Q) = 1$.

Essa non è B. V. H. poichè la condizione *a*) di questa definizione non è soddisfatta.

9. In questo numero espongo un esempio di una trasformazione piana che è A. C. senza essere B. V. H..

Allo scopo considero la linea γ dell'esempio precedente ed osservo che in virtù di noti risultati sulla rappresentazione conforme si può rappresentare conformemente l'interno di γ nell'interno di Q^* e si può prolungare questa corrispondenza fino ai contorni γ e Q^* in modo che si mantenga biunivoca e bicontinua su tutto Q.

La trasformazione che così si ottiene è A. C. in virtù dei teoremi di approssimazione di L. CESARI e di una proprietà caratteristica delle trasformazioni A. C. [3].

Essa non è B. V. H. per lo stesso motivo del n. precedente.

10. In questo numero considero una classe di trasformazioni piane B. V. che sono anche B. V. H.

Allo scopo ricordo che secondo L. CESARI [2] una trasformazione piana si dire regolare se esistono due insiemi numerabili; ovunque densi, appartenenti all'intervalle (0, 1); $[\xi_n]$, $[\eta_n]$; tali che su ciascuna delle curve

$$C_{\xi_n}:\ x = x(\xi_n,\ v),\quad y = y(\xi_n,\ v),\quad 0 \leq v \leq 1;\quad n = 1,\ 2, \ldots$$
$$C_{\eta_n}:\ x = x(u,\ \eta_n),\quad y = y(u,\ \eta_n);\ 0 \leq u \leq 1;\quad n = 1,\ 2, \ldots$$

occupi un insieme di punti di misura nulla del piano xy.

Si ha allora il seguente

TEOREMA. - Se $(T,\ Q)$ è regolare, se l'immagine $T(Q^*)$ del contorno Q^* di Q secondo $(T,\ Q)$ occupa un insieme di punti di misura nulla del piano xy (4), se essa è B. V. allora essa è anche B. V. H..

Per tale trasformazione è infatti possibile verificare la condizione $a)$ della definizione B. V. H..

Quanto alla condizione $b)$ si riconosce che essa è soddisfatta con il seguente ragionamento.

Sia $\delta_1,\ \delta_2, \ldots,\ \delta_n$ un gruppo di insiemi aperti appartenenti a Q, privi a due a due di punti in comune, ammissibili per $(T,\ Q)$.

Poichè sull'insieme chiuso $T(\delta_i^*)$ è $A(x,\ y;\ T,\ \delta_i) = 0$ si ha

$$V(\delta_i) = \left| \iint\limits_K A(x,\ y;\ T,\ \delta_i)dxdy \right| = \left| \iint\limits_{K - T(\delta_i^*)} A(x,\ y;\ T,\ \delta_i)dxdy \right| =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \left| \iint\limits_{K - [T(\delta_i^*)]_\rho} A(x,\ y;\ T,\ \delta_i)dxdy \right|,$$

dove con $[T(\delta_i^*)]_\rho$ si è indicato l'insieme dei punti del piano xy che distano dall'insieme chiuso $T(\delta_i^*)$ meno di $\rho > 0$.

(4) Si noti che questa ipotesi equivale al fatto che $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\eta = 1$ appartengano agli insiemi $[\xi_n]$, $[\eta_n]$.

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio sia $\sigma < 0$ tale che se h è un insieme del piano xy di misura $< \sigma$ si abbia

$$\iint_h \Psi^*(x,\ y;\ T,\ Q)dxdy < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Ricordiamo quindi che l'insieme chiuso $T(\delta_i^*)$ ha misura nulla, si può perciò determinare un $\bar\rho > 0$ tale che si abbia

$$|[T(\delta_i^*)]_{\bar\rho}| < \sigma, \quad \left| \iint_{K-[T(\delta_i^*)]_{\bar\rho}} A(x,\ y;\ T,\ \delta_i)dxdy \right| > V(\delta_i) - \frac{\varepsilon}{n}; \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Come nel n. 7 possiamo determinare un numero finito di regioni poligonali R_{is} appartenenti a δ_i, tali che $T(\delta_i - \sum_s \bar R_{is}) \in [T(\delta_i^*)]_{\bar\rho}$.

Sarà allora, per ogni $(x,\ y) \,\bar\in\, [T(\delta_i^*)]_{\bar\rho}$,

$$\begin{aligned} A(x,\ y;\ T,\ \delta_i) &= A(x,\ y;\ T,\ \sum_s R_{is}^{(0)}) + A(x,\ y;\ T,\ \delta_i - \sum_s \bar R_{is}) = \\ &= \sum_s A(x,\ y;\ T,\ R_{is}^{(0)}) = \sum_s O(x,\ y;\ T,\ R_{is}) \end{aligned}$$

e quindi

$$V(\delta_i) < \left| \iint_{K-[T(\delta_i^*)]_{\bar\rho}} | \Sigma_s O(x,\ y;\ T,\ R_{is}) | \, dxdy \right| + \frac{\varepsilon}{n} \leq$$

$$\leq \left| \iint_K | \sum_s O(x, y;\ T, R_{is}) | \, dxdy \right| + \left| \iint_{[T(\delta_i^*)]_{\bar\rho}} | \Sigma_s O(x, y;\ T, R_{is}) | \, dxdy \right| + \frac{\varepsilon}{n} <$$

$$< \sum_s \left| \iint_K O(x,\ y;\ T,\ R_{is})dxdy \right| + \sum_s \left| \iint_{[T(\delta_i^*)]_{\bar\rho}} O(x,\ y;\ T,\ R_{is})dxdy \right| + \frac{\varepsilon}{n}$$

da cui

$$\begin{aligned} V(\delta_i) &< \iint_K \Sigma_s | O(x, y;\ T, R_{is}) | \, dxdy + \iint_{[T(\delta_i^*)]_{\bar\rho}} \Sigma_s | O(x, y;\ T, R_{is}) | \, dxdy + \frac{\varepsilon}{n} \\ &< \iint_K \Sigma_s | O(x, y;\ T, R_{is}) | \, dxdy + \iint_{[T(\delta_i^*)]_{\bar\rho}} \Psi^*(x,\ y;\ T,\ Q)dxdy + \frac{\varepsilon}{n} \\ &< \iint_K \Sigma_s | O(x, y;\ T, R_{is}) | \, dxdy + 2\frac{\varepsilon}{n}. \end{aligned}$$

Ne viene quindi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n V(\delta_i) &< \iint_K \Sigma_i \ \Sigma_s | O(x,\ y;\ T,\ R_{is}) | \, dxdy + 2\varepsilon \leq \\ &\leq \iint_K \Psi^*(x,\ y;\ T,\ Q)dxdy + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

e ciò prova il nostro asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. ALEXANDROFF - H. HOPF, *Topologie*, Berlin, (1935).

[2] L. CESARI, *Sulle trasformazioni continue e sull'area delle superficie*, « Mem. Accad. Ital. », (12), 1365-1399, (1942).

[3] L. CESARI, *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*, « Mem. Accad. Ital. », (13), 13232-1481, (1943).

[5] B. V. KERÉKJARTO, *Vorlesungen über Topologie*, Berlin, 1923.

[5] C. MIRANDA, *Problemi di esistenza in Analisi Funzionale*, « Quad. Mat. Sc. Norm. Sup. Pisa », 1949.

[6] H. OKAMURA, *On the surface integral and Gauss-Green's theorem*, « Kyoto Math. Mem. », 26, 5-14, (1950).

[7] T. RADÒ, *Lenght and area*, « Amer. Mat. Soc. Colloquium Publications », XXX, (1948).

[8] T. RADÒ, *Two-dimensional concepts of bounded and absolute continuity*, « Duke Math. Jour. », 14, 587-608, (1947).