BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni.

- * M. Picone, T. Viola, *Lezioni sulla moderna teoria dell'integrazione*, Einaudi, 1952 (Gianfranco Cimmino)
- * E. Bompiani, *Metriche non-euclidee*, Università di Roma, 1951-52 (Beniamino Segre)
- * Edwin Madelung, *Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers*, Springer Verlag, Berlin, 1950 (Dario Graffi)
- * G. W. Spenceley, M. Spenceley, E. R. Epperson, *Smithsonian Logarithmic Tables to base e and base 10*, Smithsonian, Washington, 1952 (Gaetano Villari)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 7
(1952), n.4, p. 452-458.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_452_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

M. PICONE - T. VIOLA, *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione*
(Edizioni Scientifiche Einaudi, 1952, pp. 404).

Fra le molte esposizioni d'insieme, anche assai recenti, della teoria dell'integrazione, in Italia e all'Estero, questa di M. Picone e T. Viola non può mancare di imporsi all'attenzione dei cultori di matematica pura e applicata, che troveranno in essa prezioso materiale di studio presentato con caratteri di spiccata originalità. I due Autori hanno ripensata la materia dalle fondamenta e l'hanno interamente rifusa con criteri propri, come, nei primi dieci dei quattordici capitoli onde si compone l'opera, nei quali appare assai netta l'impronta personale di M. Picone, sottolinea anche formalmente l'assenza di richiami ad altre trattazioni; nè, in tanta ricchezza di risultati esposti, viene esplicitamente segnalato quali fra essi, occorsi per completare la teoria in questo suo moderno, attraente inquadramento, siano, come gli specialisti potranno riconoscere, da considerarsi nuovi.

Ciò che anzitutto colpisce il lettore esperto di altre eccellenti opere sull'argomento è che qui ci si fonda costantemente sulla nozione di integrale secondo Stieltjes, partendo direttamente da essa, senza premettere quella dell'integrale in senso ordinario, la quale si può sempre riottenere, volendo, come ovvio caso particolare. Effettivamente l'esposizione non riesce per ciò meno agile, sicchè l'innovazione appare opportuna; ed essa corrisponde pure evidentemente, nella mente degli AA., alla necessità, forse tuttoggi da molti non ancora abbastanza sentita e qui messa in luce con qualche caratteristico esempio nell'Introduzione che, nelle applicazioni della matematica alla fisica, si dia un posto preminente all'integrale secondo Stieltjes.

Un'altra felice caratteristica del libro è l'uso sistematico della nozione di limite nella forma, alla quale M. Picone si è attenuto nel suo insegnamento universitario da oltre un trentennio e che fu per la prima volta pubblicata da lui nelle sue *Lezioni di Analisi Matematica* edite a Catania nel 1923 (nozione quasi contemporaneamente fissata in forma equivalente in una memoria di Moore e Smith, e indicata perciò dagli autori americani e da altri come « limite nel senso di Moore-Smith »).

Va rilevato infine che tutta la trattazione si svolge per le funzioni di un numero qualsiasi di variabili, e anche ciò è ottenuto dagli AA., mediante sagaci accorgimenti, senza che ne riesca sensibilmente appesantita l'esposizione.

Carattere preparatorio hanno i primi tre capitoli, nei quali, dopo alcune generalità sugli insiemi di punti e sulla teoria dei limiti, si tratta delle funzioni additive di intervallo e dell'integrale nel senso detto di Riemann-Stieltjes. Viene fra l'altro provato che fra il minimo e il massimo integrale definiti « per de-

composizioni infinitesimali » (cioè facendo tendere a zero le dimensioni degli intervalli di scomposizione) sono compresi quelli definiti « per decomposizioni successive » (cioè nel senso usualmente detto di Pollard).

Della nozione di integrale di Riemann-Stieltjes, tuttavia nel solo caso particolare delle funzioni continue in insiemi chiusi e limitati (caso in cui è assicurata l'integrabilità anche per decomposizioni infinitesimali), ci si serve poi nel capitolo IV, per definire il minimo e il massimo integrale di Lebesgue-Stieltjes per una funzione f su un insieme E , ove non si faccia assolutamente nessuna ipotesi nè sulla f , nè su E . Tale definizione viene data, ispirandosi a un'idea che risale a R. Caccioppoli (Rend. Palermo, 1928): si parte dalla classe di tutti gli insiemi chiusi C contenuti in E (non escluso l'insieme vuoto, o quelli formati da punti in numero finito) in cui la f riesce continua, si forma l'integrale esteso a C della f , indi si passa al (minimo, o massimo) limite, ordinando i valori di tali integrali in modo da chiamare « seguenti quello esteso a un insieme chiuso C » quelli estesi a tutti i detti insiemi chiusi contenenti C .

Stabilita questa definizione così inconsuetamente generale, ci si limita successivamente ad applicarla nel caso di « insiemi lebesghiani » e di « funzioni quasi continue », sempre rispetto a una data funzione additiva α a variazione limitata di intervallo; nel caso particolare che la α sia la misura (nel senso ordinario), l'insieme lebesghiano si riduce all'insieme dotato di misura (finita, o infinita) secondo Lebesgue, mentre la quasi continuità acquista il significato usuale: e l'analogo della misura nel caso generale viene detto « massa m_α ». Il capitolo V contiene le proprietà fondamentali delle masse m_α degli insiemi lebesghiani, e i capitoli VI, VII, VIII quelle degli integrali delle funzioni quasi continue in tali insiemi: nel caso particolare che la massa sia l'ordinaria misura, il lettore ritroverà tutta la teoria ben nota; con speciale ampiezza sono trattati fra l'altro, per esempio, i vari tipi di convergenza per le successioni di funzioni quasi continue, il teorema di Severini-Egoroff e quelli sul passaggio al limite sotto al segno di f .

Il capitolo IX è dedicato allo studio della convergenza in media di ordine qualsiasi, e poi in particolare allo spazio funzionale hilbertiano, sempre rispetto a una distribuzione di masse non negative; vi trovano posto argomenti classici (determinante di Gram, procedimento di ortonormalizzazione, serie di Fourier rispetto a un sistema ortonormale, completezza hilbertiana dei sistemi di funzioni) e lo studio di quei sistemi di infinite equazioni integrali, detti di Fischer-Riesz, che, nelle ricerche di M. Picone e della sua scuola, hanno ricevuto, come è noto, numerose feconde applicazioni.

Il capitolo X tratta molto diffusamente delle formule di riduzione per gli integrali multipli, con una applicazione alla costruzione di sistemi hilbertiani completi di funzioni di più variabili. E' da porre in rilievo la nuova elegante generalissima espressione, che qui riceve (p. 267) la formula per la riduzione di un'integrazione estesa a un insieme lebesghiano I di uno spazio a $m+n$ dimensioni in due successive integrazioni estese a insiemi di spazi a m e a n dimensioni. Tale espressione è consentita dalla definizione data, alla quale, abbiamo dianzi accennato, di integrale di una funzione arbitraria esteso a un insieme arbitrario, in virtù della quale si può parlare di integrazione estesa all'insieme, proiezione di I sullo spazio coordinato a m dimensioni, insieme che può non riuscire lebesghiano.

I capitoli XI, XII, XIII, XIV, come è dichiarato nella prefazione, sono, il primo in gran parte, gli altri tre totalmente, dovuti a T. Viola. Il primo tratta dell'integrazione di Lebesgue-Stieltjes rispetto a funzioni determinanti di punto, ciò che fornisce l'occasione per uno studio delle funzioni (di più variabili) a variazione finita secondo Vitali e offre il mezzo per arrivare a formule di in-

tegrazione per parti relative a integrali multipli (sempre di Lebesgue-Stieltjes). Gli ultimi tre capitoli riguardano le funzioni additive di insieme. Nel XII viene mostrato fra l'altro come, secondo un'idea di R. Caccioppoli, si possa in certe condizioni applicare alle funzioni additive di intervallo una specie di processo di estrapolazione, per prolungarne la definizione, preservando l'additività, anche a tutti gli insiemi boreliani. Il risultato culminante del capitolo XIII è quello sulla scomponibilità di una funzione additiva, definita nell'aggregato di tutti gli insiemi lebesghiani rispetto a una data α e contenuti in un dato insieme cosiffatto, nella somma di una funzione assolutamente continua, esprimibile come un integrale di Stieltjes rispetto ad α , e di una funzione nucleare. L'ultimo capitolo contiene uno studio approfondito sulla derivazione delle funzioni additive di insiemi lebesghiani rispetto a una data α , e perviene a sistemare nella cornice di generalità in cui è svolta tutta la trattazione la classica estensione lebesghiana del teorema fondamentale del calcolo integrale.

Assai utili indici completano l'opera. Eccellente la veste tipografica.

GIANFRANCO CIMMINO

E. BOMPIANI, *Metriche non-euclidee*. Corso tenuto presso l'Università di Roma nell'anno accademico 1951-52 (pp. 22+69+80+54+23).

In questo volume, nel breve volgere di circa 250 pagine, sono magistralmente esposti i fondamenti delle varie geometrie non euclidea del piano e dello spazio indagate in modo unitario in relazione ad un opportuno assoluto, con particolare riguardo all'aspetto metrico reale delle questioni ed alla « visualizzazione » dei risultati in termini elementari, ma senza trascurare le considerazioni (proiettive, gruppali, topologiche, differenziali, ecc.) di carattere più elevato. L'eclettismo dei metodi impiegati e la molteplicità dei punti di vista e degli addentellati con altre teorie rendono l'esposizione assai attraente ed interessante; e va segnalata l'abilità che l'A. dimostra nel raggiungere i suoi intenti con rara eleganza ed estrema semplicità di mezzi, pervenendo non di rado a dare sapore di novità ad argomenti classici.

Il volume manca di indicazioni storiche e bibliografiche, ed appare in una edizione poligrafica (di lettura piuttosto difficile). Questo fatto è un indice della penosa situazione in cui attualmente trovasi l'industria libraria italiana: è un vero peccato che quell'opera non sia uscita in veste migliore, essendo indubbio l'interesse ch'essa presenta per una cerchia di lettori assai più ampia di quella degli studenti per cui è stata scritta, ed è augurabile che all'A. sia dato di farne presto un'edizione a stampa.

Il primo dei cinque paragrafi di cui il libro si compone (in ciascuno dei quali la numerazione delle pagine riprende daccapo) tratta della geometria del piano ellittico, istituendo anche un raffronto di essa con quella euclidea (specialmente per ciò che concerne il parallelismo fra rette e l'area dei triangoli) ed una sua realizzazione sulla sfera.

Il § 2, dedicato al piano iperbolico, stabilisce le prime proprietà dei vari tipi di cicli, con particolare riguardo agli oricicli ed in relazione pure all'angolo di parallelismo definito da un punto ed una retta. L'elemento lineare del piano iperbolico vien quindi espresso sia in coordinate di Weierstrass che in coordinate oricicliche, deducendone la proprietà geodetica delle rette e la rappresentazione (di Beltrami) di un pezzo del piano iperbolico sulla pseudosfera.

Seguono un breve studio della metrica iperbolica esterna, con cenni sulla sua importanza filosofica e relativistica, e considerazioni di continuità che mostrano la geometria euclidea come caso limite intermedio fra la geometria ellittica e quella iperbolica. La rappresentazione conforme del piano iperbolico su di un semipiano euclideo, ottenuta attraverso l'introduzione di opportune coordinate oricicliche, è poi lumeggiata geometricamente mediante l'analoga rappresentazione su di una semisfera, e vien utilizzata nello studio del gruppo dei movimenti (di 1^a e di 2^a specie) del piano iperbolico in sé. L'area di un triangolo è quindi definita in geometria iperbolica in due modi, fra loro non equivalenti, il primo dei quali porta ad un'estensione del teorema dei seni, mentre il secondo, collegato al teorema sul difetto sferico ed alla rappresentazione (di Lambert) sulla sfera di raggio i , viene illustrato con un'elegante soluzione del problema di costruire un triangolo avente angoli assegnati. Infine, mediante originali considerazioni topologiche, e poggiando su semplici proprietà dei poligoni regolari in geometria iperbolica, vien dimostrato che — sopra ogni superficie chiusa bilatera di genere p — si può distendere una metrica ellittica, euclidea od iperbolica secondochè $p=0$, $p=1$ o $p \geq 2$.

Il § 3, che è il più ricco di contenuto, verte sulla metrica ellittica nello spazio. Dopo aver trattato di distanze, angoli e questioni di perpendicolarità, passa allo studio dei movimenti, in particolare degli scorrimenti, ed all'introduzione delle congruenze paratattiche e delle parallele di Clifford (sinistre e destre), assegnando fra l'altro le generazioni cinematiche di Bianchi per le quadriche di Clifford. Tale studio viene approfondito con l'intervento dei parametri di scorrimento di Fubini e dell'angolo di parallelismo relativo ad un punto e ad una retta, e con l'uso dei quaternioni, fino ad ottenere la rappresentazione di Fubini-Study dello spazio ellittico rigato su di una coppia di sfere, ed a stabilire che l'immagine di un movimento di quello è data da due rotazioni su queste. Le rigate di Clifford sono quindi caratterizzate come le rigate dello spazio ellittico su cui la metrica dell'ambiente subordina una metrica euclidea. Segue la rappresentazione di Killing-Darboux dei punti dello spazio ellittico con le coppie di punti inversi rispetto ad una sfera fondamentale complessa, resa più perspicua col sostituire a quest'ultima un'opportuna sfera reale; fra l'altro, si ottengono le cicli di Dupin ed i relativi cerchi di Villarceau quali immagini delle quadriche di Clifford e delle loro generatrici, e si prova che la suddetta rappresentazione risulta conforme. Da ultimo, sono assegnati vari significati geometrici per la curvatura e la torsione delle curve sghembe dello spazio ellittico, per le quali vengono dimostrate le formule di Frenet-Bianchi e quelle di Frenet-Fubini; le curve a torsione ± 1 sono indi costruite in modo elegante a partire da una rigata di Clifford, e ad ogni curva o rigata (o congruenza di rette) dello spazio ellittico è associata una coppia di curve dello spazio ellittico fra loro opportunamente legate (od una trasformazione puntuale di una sfera in sé), il che permette di impostare e risolvere in modo semplice varie questioni differenziali su quegli enti.

Il § 4 tratta della metrica iperbolica nello spazio, ove si distinguono i punti in propri, impropri, ed ideali, e le sfere in sfere (proprie), orisfere ed ipersfere. Le prime questioni relative alle distanze ed agli angoli, nonchè alla perpendicolarità ed al parallelismo, sono studiate tanto dal punto di vista proiettivo sintetico quanto dal punto di vista analitico. Seguono l'analisi e la classificazione dei movimenti e dei relativi gruppi ∞^1 , e la rappresentazione dello spazio iperbolico all'interno di una sfera, da cui vien poi dedotta la rappresentazione sul semispazio di Poincaré, completata da un esame del suo modo di agire sul piano limite. Ciò fornisce una rappresentazione dei punti

dello spazio iperbolico coi cerchi del piano limite; la considerazione dell'immagine in essa dei movimenti di quello spazio conduce alla nozione astratta di piano di Möbius (caratterizzato dalle affinità circolari), da cui si risale quindi alla rappresentazione dei movimenti dello spazio iperbolico nel semispazio di Poincaré ed allo studio di alcune questioni concernenti la composizione di tali movimenti (condizioni per la permutabilità di due movimenti, gruppi costituiti da sole rotazioni ellittiche).

L'ultimo paragrafo concerne le metriche (quasi-euclidee) con assoluto spezzato in due piani ed in due punti giacenti sulla retta comune ai due piani, con speciale riguardo al caso (quasi-ellittico) in cui tanto i due piani che i due punti sono fra loro complessi coniugati. L'osservazione che quest'ultima metrica è ottenibile quale limite di una metrica ellittica, porta ad introdurre anche in essa le parallele di Clifford, ed a rappresentare — al modo di Blaschke e Grünwald — le rette dello spazio quasi-ellittico con le coppie di punti di un piano euclideo, ed i punti del primo con le rotazioni del secondo. Vengono infine trattate varie questioni relative a questa « rappresentazione cinematica » (immagine dei piani, condizione d'incidenza fra rette, immagini dei due regoli e dei punti di una quadrica di Clifford, ecc.), deducendone una semplice costruzione delle quadriche di Clifford, nonché la rappresentazione piana degli ∞^3 scorrimenti e degli ∞^7 movimenti diretti dello spazio quasi-ellittico.

BENIAMINO SEGRE

M. A. LAVRENTIEFF - L. A. LIUSTERNIK, *Kurs variazionnogo isčislenja*, (Corso di Calcolo delle variazioni), 2^a Ed., rielaborata, (« Gosud. Isdat. Techn. Teoret. Liter. », Mosca-Leningrado 1950), pp. 1-296; rubli 5.95.

Il contenuto dei vari Capitoli è il seguente: I. Metodi elementari per la ricerca delle estremali; II. Metodo delle variazioni; III. Generalizzazioni del problema piano; IV. Curve ammissibili con punti terminali mobili. Soluzioni discontinue; V. Estremi condizionati; VI. Problemi variazionali in forma parametrica; VII. Teoria dei campi di estremali; VIII. Condizioni sufficienti per gli estremi deboli e forti; IX. Problemi variazionali lineari; X. Problema del « minimo dei massimi ».

I primi otto Capitoli svolgono una rapida, ma accurata esposizione delle teorie classiche relative alle classi più semplici di problemi variazionali; il carattere della trattazione è elementare ed a ciò contribuisce l'uso in tutto il corso dell'integrale di Mengoli-Cauchy-Riemann.

I due ultimi Capitoli hanno essenzialmente carattere applicativo delle teorie svolte.

Il Cap. IX tratta infatti lo studio degli autovalori e delle autofunzioni associate ai sistemi differenziali di Sturm-Liouville. L'ultimo Capitolo riguarda il problema del « minimo dei massimi » (o « minimax »), introdotto nella matematica, secondo gli AA., per la prima volta da Cebicef. Data una funzione dipendente da due gruppi di variabili A e B , si fissano dapprima le variabili del gruppo A e si cerca il massimo della funzione al variare di B ; tale massimo, se esiste, è funzione delle variabili di A ed il suo minimo, se esiste, è il « minimo dei massimi ». Un problema di questo tipo è ad es. quello riguardante la determinazione dei polinomi di approssimazione di Cebicef, o quello, trattato

anche nel Cap. IX, della determinazione degli autovalori di un sistema di Sturm-Liouville.

Sono numerosi e variati gli esempi e le applicazioni, specialmente alla Meccanica ed alla Fisica Matematica; frequenti i richiami ai contributi della Scuola russa al Calcolo delle Variazioni.

Il volume si presta, in complesso, a dare un buon orientamento ai non specialisti nel Calcolo delle Variazioni.

ROBERTO CONTI

ERWIN MADELUNG - *Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers*, Springer Verlag, Berlin, 1950. (530 pagine).

Il libro in esame è la quarta edizione di un trattato in cui, come appare dal titolo, l'Autore si propone di esporre nozioni di Matematica superiore di maggiore interesse, nella Fisica-matematica e nella Fisica-teorica. Circa due terzi del libro sono dedicati infatti al calcolo vettoriale e tensoriale, alla teoria delle funzioni, alle equazioni differenziali e integrali, al calcolo delle variazioni, agli operatori e ad altri argomenti di cui è ben nota l'importanza nella Matematica applicata. Molto opportunamente un capitolo si riferisce alla teoria dei gruppi di notevole interesse nella Fisica teorica. Nella rimanente parte del libro si espone, a dire il vero in modo piuttosto sommario, la Fisica-matematica classica, mentre più ampia è la trattazione della teoria della relatività e della teoria dei quanta. E' ovvio che tutte le questioni sovraccennate non sono svolte sempre in maniera diffusa e talvolta le dimostrazioni sono appena indicate. Comunque il libro raggiunge pienamente il suo scopo che è quello di orientare il fisico nelle questioni di matematica che lo interessano in modo particolare.

DARIO GRAFFI

G. W. SPENCELEY, R. M. SPENCELEY and E. R. EPPERSON, *Smithsonian Logarithmic Tables to base e and base 10* (« Smithsonian Miscellaneous Collections », volume 118), (Washington 1952, pp. XII+402).

Il volume si compone di due parti, la prima è dedicata ai logaritmi naturali e la seconda a quelli decimali. In ambedue le parti sono riportati, in tre separate colonne, i valori con 23 cifre decimali dei logaritmi dei numeri del tipo XXXX, $1,0^2$ XXXX, $1,0^7$ XXXX, con XXXX compreso tra 1 e 10.000.

Le tavole sono preparate in modo da consentire il computo dei logaritmi e degli antilogaritmi servendosi esclusivamente del metodo di fattorizzazione di HOÜEL.

Esso consiste nel decomporre il numero di cui si desidera il logaritmo nel prodotto di quattro fattori della forma XXXX, $1,0^2$ XXXX, $1,0^7$ XXXX, $1,0^{11}$ XXXX...; i logaritmi dei primi tre sono contenuti, come si è detto, nelle tavole, il logaritmo del quarto si ricava dalla serie $l_n(1+x) = x - x^2/2 + \dots$, ponendo cioè $l_n(1,0^{11}XXXX...) = 0,0^{11}XXXX...$ meno una piccola correzione che si calcola mentalmente. Per il computo degli antilogaritmi si procede in senso inverso. L'errore che si commette con tale metodo ed usando le presenti tavole è calcolato dagli AA. in una quantità che non raggiunge nella ventitreesima cifra decimale le due unità.

Gli A. dichiarano che il metodo di fattorizzazione, malgrado possa rivelarsi

alquanto complicato e prolisso per chi, abituato a quello classico d'interpolazione, lo adotti per la prima volta, presenta notevoli vantaggi pratici specialmente per il calcolo degli antilogaritmi. A tale scopo, in una chiara introduzione, il nuovo metodo è illustrato con opportuni esempi, e sono dati numerosi consigli di carattere pratico per semplificare e snellire maggiormente i calcoli.

L'importanza delle presenti tavole è dovuta all'elevato numero di cifre decimali con cui i logaritmi sono riportati, che consente un forte grado di approssimazione nei calcoli. Un'opera fino ad oggi comunemente adottata è il « *Thesaurus Logarithmorum Completus* » a 10 cifre decimali di G. Vega (1794), di cui però, come è detto nell'introduzione del presente volume, è stata recentemente pubblicata una lunga lista degli errori contenuti.

Il volume è presentato in elegante veste tipografica, la stampa è chiara e le tavole sono composte in modo da rendere pratica e spedita la consultazione.

GAETANO VILLARE