
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALFREDO MOESSNER

**Soluzione delle Questioni proposte nel
Bollettino dell'Unione Matematica
Italiana, (3), VII (1952), p.71.**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 7
(1952), n.4, p. 447–451.*

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_447_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_447_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Soluzione delle Questioni proposte nel Bollettino dell' Unione
Matematica Italiana, (3), VII (1952), p. 71.**

Nota di ALFREDO MOESSNER (a Gunzenhausen).

Sunto. - *Si danno soluzioni di alcune Questioni proposte dall' A.*

I. Soluzione generale del sistema:

$$\begin{aligned} A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4^2, B_1, B_2, B_3, B_4 &\stackrel{6}{=} C_1^2, C_2^2, C_3^2, C_4^2, D_1, D_2, D_3, D_4 \\ A_1, A_2, A_3, A_4 &\stackrel{n}{=} C_1, C_2, C_3, C_4 \quad (n=2, 4, 6) \\ B_1, B_2, B_3, B_4 &\stackrel{3}{=} D_1, D_2, D_3, D_4. \end{aligned}$$

1) - Ci serviamo dell' eguaglianza

$$(\alpha) \quad 7G^2 = H^2 + HJ + J^2$$

che ammette la soluzione generale

$$H = 2a^2 - 2ab - 3b^2; \quad J = a^2 + 6ab + 2b^2; \quad G = a^2 + ab + b^2,$$

dove a e b sono numeri arbitrari.

Da (α) seguono, per $n=2, 4, 6$, le identità:

$$\begin{aligned} (\beta) \quad &7G + H, 3H - G, 2J - H + G, 3H + 2J - G \stackrel{n}{=} \\ &\stackrel{n}{=} 7G - H, 3H + G, 2J - H - G, 3H + 2J + G, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma) \quad &7G + J, -G + 2H + 3J, -G + 3J, -G - 2H + J \stackrel{n}{=} \\ &\stackrel{n}{=} G + 2H + 3J, G + 3J, 7G - J, G - 2H + J, \\ &7G + H + J, -G + 3H + 3J, -G + 3J + H, -G + 3H + J \stackrel{n}{=} \end{aligned}$$

Otteniamo pertanto dalle (β) , (γ) , (δ) tre gruppi di soluzioni della multigrada:

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \stackrel{n}{=} C_1, C_2, C_3, C_4 \quad (n=2, 4, 6).$$

ESEMPIO. — Per $a=2$, $b=1$ risulta $H=1$, $J=18$, $G=7$. Sostituendo tali valori nella (δ) , otteniamo l'identità

$$68, 50, 48, 14 \stackrel{n}{=} 64, 62, 30, 28 \quad (n=2, 4, 6)$$

e dividendo per 2 le basi

$$34, \underline{25}, \underline{24}, \underline{7} \stackrel{n}{=} 32, 31, 15, 14 \quad (n=2, 4, 6). \quad (1)$$

Una soluzione parametrica di

$$(\varepsilon) \quad \sum_{i=1}^4 A_i^n = \sum_{i=1}^4 B_i^n \quad (n=2, 4, 6)$$

si ottiene ponendo $A_1 = 9a^2 + 5ab + 4b^2$; $A_2 = 5a^2 - 7ab - 10b^2$; $A_3 = a^2 + 15ab + 8b^2$; $A_4 = 7a^2 + 5ab - 6b^2$; $C_1 = 5a^2 + 9ab + 10b^2$; $C_2 = 7a^2 - 5ab - 8b^2$; $C_3 = -a^2 + 13ab + 6b^2$; $C_4 = 9a^2 + 7ab - 4b^2$.

ESEMPIO. — Per $a=2$, $b=1$ si ottiene $A_1=25$, $A_2=-2$, $A_3=21$, $A_4=16$, $C_1=24$, $C_2=5$, $C_3=14$, $C_4=23$, e pertanto, potendosi trascurare i segni negativi, si ha una soluzione numerica della Questione.

$$2) \text{ Sia } M_1, M_2, M_3, M_4 \stackrel{3}{=} Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$$

e si ponga

$$s = (M_1 + M_2 + M_3 + M_4)/2,$$

si ha allora

$$\begin{aligned} M_1, M_2, M_3, M_4, s - Q_4, s - Q_3, s - Q_2, s - Q_1 &\stackrel{6}{=} \\ &= Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, s - M_4, s - M_3, s - M_2, s - M_1 \end{aligned}$$

con

$$s - Q_4, s - Q_3, s - Q_2, s - Q_1 \stackrel{3}{=} s - M_4, s - M_3, s - M_2, s - M_1.$$

Poniamo

$$\begin{aligned} M_1 &= A_1^2, M_2 = A_2^2, M_3 = A_3^2, M_4 = A_4^2, \\ Q_1 &= C_1^2, Q_2 = C_2^2, Q_3 = C_3^2, Q_4 = C_4^2; \end{aligned}$$

per la

$$\sum_{i=1}^4 A_i^n = \sum_{i=1}^4 B_i^n \quad (n=2, 4, 6),$$

quando sia

$$s = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2)/2$$

(1) I numeri sottosegnati formano una terna pitagorica.

vale l'identità

$$\begin{aligned} A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4^2, s - C_1^2, s - C_3^2, s - C_2^2, s - C_4^2 &= \\ &= C_1^2, C_2^2, C_3, C_4^2, s - A_4^2, s - A_3^2, s - A_2^2, s - A_1^2, \end{aligned}$$

e vale anche

$$B_1, B_2, B_3, B_4 = D_1, D_2, D_3, D_4$$

quando si ponga

$$\begin{aligned} s - C_1^2 &= B_1, s - C_3^2 = B_2, s - C_2^2 = B_3, s - C_4^2 = B_4, \\ s - A_4^2 &= D_1, s - A_3^2 = D_2, s - A_2^2 = D_3, s - A_1^2 = D_4. \end{aligned}$$

Sarà pertanto

$$\begin{aligned} A_1^2 + D_4 &= A_2^2 + D_3 = A_3^2 + D_2 = A_4^2 + D_1 = \\ &= B_1 + C_4^2 = B_2 + C_3^2 = B_3 + C_2^2 = B_4 + C_1^2. \end{aligned}$$

ESEMPIO. - Dalla soluzione numerica ottenuta in (1) segue $s = (34^2 + 25^2 + 24^2 + 7^2)/2 = 1203$, quando sia $34 = A_1$, $25 = A_2$, $24 = A_3$, $7 = A_4$, $32 = C_1$, $31 = C_2$, $15 = C_3$, $14 = C_4$.

I valori delle B_i sono $1203 - 14^2 = 1007$, $1203 - 15^2 = 978$, $1203 - 31^2 = 242$, $1203 - 32^2 = 179$; i valori delle D_i sono $1203 - 7^2 = 1154$, $1203 - 24^2 = 627$, $1203 - 25^2 = 578$, $1203 - 34^2 = 47$.

II. Soluzioni in numeri interi del sistema:

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2$$

$$A^4 + B^4 + C^4 = D^4 + E^4 + F^4.$$

1) Sia $m \cdot p = q \cdot r$, sarà anche

$$m + p + (q + r) = q + r + (m + p)$$

$$m^2 + p^2 + (q + r)^2 = q^2 + r^2 + (m + p)^2.$$

Otteniamo pertanto con questo metodo le soluzioni dell'equazione

$$U_1, U_2, U_3 = V_1, V_2, V_3.$$

ESEMPIO. - Per $7 \cdot 9 = 3 \cdot 21$ si ottiene $7, 9, 24 = 3, 21, 16$.

2) Sia $U_1, U_2, U_3 = V_1, V_2, V_3$ e $k = (U_1 + U_2 + U_3)/3$; si ha allora

$$(k - U_1)^2 + (k - U_2)^2 + (k - U_3)^2 = (k - V_1)^2 + (k - V_2)^2 + (k - V_3)^2$$

$$(k - U_1)^4 + (k - U_2)^4 + (k - U_3)^4 = (k - V_1)^4 + (k - V_2)^4 + (k - V_3)^4.$$

Ponendo $k - U_1 = A$, $k - U_2 = B$, $k - U_3 = C$, $k - V_1 = D$, $k - V_2 = E$, $k - V_3 = F$, otteniamo le soluzioni della $A, B, C \stackrel{n}{=} D, E, F$ ($n = 2, 4$), dove $A + B + C = D + E + F = 0$.

ESEMPIO. - Facendo nella soluzione numerica ottenuta in (1) $7 = A$, $9 = B$, $24 = C$, $3 = D$, $21 = E$, $16 = F$, si ottiene $k = (7 + 9 + 24)/3 = 40/3$, da cui si ricava

$$(40/3 - 7), (40/3 - 9), (40/3 - 24) \stackrel{n}{=} (40/3 - 3), (40/3 - 21), (40/3 - 16) \quad (n = 0, 1, 2).$$

Riducendo a forma intera:

$$19, 13, (-32) \stackrel{n}{=} 31, (-23), (-8) \quad (n = 0, 1, 2, 4)$$

e pertanto

$$19^2 + 13^2 + 32^2 = 31^2 + 23^2 + 8^2$$

$$19^4 + 13^4 + 32^4 = 31^4 + 23^4 + 8^4.$$

3) Sia $A, B, C \stackrel{n}{=} D, E, F$ ($n = 2, 4$); ne segue, quando $A < B < C$ e $D < E < F$,

$$(B - A), (A + B), (B + C) \stackrel{n}{=} (E - D), (D + F), (E + F) \quad (n = 2, 4).$$

ESEMPIO. - Poniamo nella soluzione numerica ottenuta in (2) $13 = A$, $19 = B$, $32 = C$, $8 = D$, $23 = E$, $31 = F$; si ottiene così il risultato

$$(19 - 13), (13 + 32), (19 + 32) \stackrel{n}{=} (23 - 8), (8 + 31), (23 + 31) \quad (n = 2, 4)$$

da cui

$$6, 45, 51 \stackrel{n}{=} 15, 39, 54 \quad (n = 2, 4).$$

4) Una soluzione generale dell'equazione $A, B, C \stackrel{n}{=} D, E, F$ ($n = 2, 4$) è data dalle seguenti formule

$$A = 3x(x - y) \cdot z^2 + (2x + y)(x - 2y) \cdot z \cdot u - (x + y)^2 \cdot u^2;$$

$$B = 3(x - y)^2 \cdot z^2 - (2x - y)(x + 2y) \cdot z \cdot u - x(x + y) \cdot u^2;$$

$$C = 3(x^2 - y^2) \cdot z^2 - 3y^2 \cdot z \cdot u + (x^2 - y^2) \cdot u^2;$$

$$D = -3x(x - y) \cdot z^2 + (2x - y)(x + 2y) \cdot z \cdot u + (x^2 - y^2) \cdot u^2;$$

$$E = -3(x^2 - y^2) \cdot z^2 - (2x + y)(x - 2y) \cdot z \cdot u + (x + y) \cdot u^2;$$

$$F = 3(x - y)^2 \cdot z^2 + 3y^2 \cdot z \cdot u + (x + y)^2 \cdot u^2.$$

Da cui si ha

$$A - B = D - E = 3y(x - y) \cdot z^2 + 4(x^2 - y^2) \cdot z \cdot u - y(x + y) \cdot u^2.$$

Queste formule danno anche soluzioni per $A, B, C \overset{''}{=} D, E, F$ ($n = 2, 4$), dove $A + B \neq C$; $A + C \neq B$; $B + C \neq A$; $D + F \neq E$; $D + E \neq F$; $E + F \neq D$.

ESEMPIO. - (α) Si ponga $x = 3, y = 1, u = z = 2$; dividendo le basi per 4 si ottiene la soluzione

$$A = -9, B = -25, C = 29, D = 15, E = -19, F = 31.$$

(β) Si ponga $x = 7, y = 19, z = 4, u = -3$; si ottiene

$$A = 120, B = 143, C = 266, D = 218, E = 241, F = 0.$$

Un'identità curiosa.

Si ha:

$$\begin{aligned} 1^n(210^{n-1} \pm 210^{n-2}) + 5^n(42^{n-1} \pm 42^{n-2}) + 6^n(35^{n-1} \pm 35^{n-2}) = \\ = 2^n(105^{n-1} \pm 105^{n-2}) + 3^n(70^{n-1} \pm 70^{n-2}) + 7^n(30^{n-1} \pm 30^{n-2}), \end{aligned}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

ed anche

$$1 + 5 + 6 \simeq 2 + 3 + 7; \quad 1^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2.$$

ALFREDO MOESSNER
