Bollettino
Unione Matematica Italiana

Salvatore Russo

Sui sistemi di equazioni differenziali lineari, omogenei, a matrice costante e periodica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.4, p. 428–430.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_428_0>

Sui sistemi di equazioni differenziali lineari, omogenei, a matrice costante e periodica.

Nota di SALVATORE RUSSO (a Catania).

Sunto. - *Su argomento consigliato nel Seminario matematico dal prof.* VINCENZO AMATO *ho studiato un sistema normale omogeneo di equazioni differenziali lineari, di ordine* n, *a matrice costante periodica, dando l'integrale generale in funzione di* p *trascendenti intere.*

1. Consideriamo il sistema normale di equazioni differenziali lineari, omogeneo e di ordine n:

$$\frac{dY(x)}{dx} = A \cdot Y(x), \tag{1}$$

dove A e $Y(x)$ denotano rispettivamente la matrice:

$$A = \| a_{ik} \| \quad (i, \ k = 1, \ 2, \dots, \ n), \quad Y(x) = \begin{Vmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{Vmatrix},$$

essendo le a_{ik} costanti date e $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ le funzioni incognite.

È ben noto [1] che l'integrale di (1), soddisfacente le condizioni iniziali:

$$y_i(\alpha) = y_i^0, \ (i = 1, \ 2, \dots, \ n),$$

è dato da

$$Y(x) = e^{A(x-\alpha)} Y_0, \text{ con } Y_0 = \begin{Vmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \dots \\ \dots \\ y_n^0 \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Se la matrice A è periodica, di periodo p, e perciò: $A^p = J_n$, essendo J_n la matrice identica di ordine n, l'integrale precedente si può porre sotto la forma:

$$Y(x) = [J_n \zeta_0(x) + A\zeta_1(x) + \dots + A^{p-1}\zeta_{p-1}(x)] \cdot Y_0 \tag{3}$$

con $\zeta_0(x)$, $\zeta_1(x), \dots, \zeta_{p-1}(x)$ funzioni della x facilmente determinabili.

Infatti, per l'assoluta convergenza della serie

$$1 + A\frac{x-\alpha}{1\,!} + A^2\frac{(x-\alpha)^2}{2\,!} + \dots$$

[1] Cfr., per esempio, G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte 1ª, Zanichelli, Bologna, 1948, pag. 87.

si ha:

$$e^{A\cdot(x-\alpha)} = \sum_{r=0}^{p-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} A^{\nu p+r} \cdot \frac{(x-\alpha)^{\nu p+r}}{(\nu p+r)!} \right),$$

ed essendo $A^p = J_n$ ne segue:

$$e^{A\cdot(x-\alpha)} = \sum_{r=0}^{p-1} A^r \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x-\alpha)^{\nu p+r}}{(\nu p+r)!}.$$

Se ora poniamo:

$$(4) \qquad \zeta_r(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x-\alpha)^{\nu p+r}}{(\nu p+r)!}, \qquad (r = 0, 1, \ldots, p-1),$$

risulta:

$$e^{A\cdot(x-\alpha)} = J_n \cdot \zeta_0(x) + A \cdot \zeta_1(x) + \ldots + A^{p-1} \cdot \zeta_{p-1}(x),$$

e, sostituendo nella (2), si ottiene, come già si è detto, la (3).

2. In particolare, se la matrice A è involutoria, si ha:

$$Y(x) = [J_n \cdot \mathrm{Ch}\,(x-\alpha) + A \cdot \mathrm{Sh}\,(x-\alpha)] \cdot Y_0.$$

Questo risultato, del resto, si può verificare direttamente.

3. Ci sembrano interessanti le proprietà di cui godono le funzioni (4).

Infatti, si ha:

$$\zeta_0(x) + \zeta_1(x) + \ldots + \zeta_{p-1}(x) = e^{x-\alpha},$$

$$(5) \qquad \frac{d\zeta_k(x)}{dx} = \zeta_{k-1}(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots, p-1)$$

dove si conviene che sia $\zeta_{-1}(x) \equiv \zeta_{p-1}(x)$; si ha inoltre:

$$(6) \qquad \zeta_0(\alpha) = 1, \; \zeta_1(\alpha) = \zeta_2(\alpha) = \ldots \zeta_{p-1}(\alpha) = 0.$$

Dalle (5) si ricava subito:

$$\frac{d^p\zeta_k(x)}{dx^p} = \zeta_k(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots, p-1),$$

onde le $\zeta_0(x), \zeta_1(x), \ldots, \zeta_{p-1}(x)$ costituiscono p integrali particolari dell'equazione differenziale:

$$(7) \qquad \frac{d^p\zeta(x)}{dx^p} = \zeta(x).$$

Il *wronskiano* $W(x)$ delle (4), tenendo presenti le (5), risulta:

$$W(x)=\begin{vmatrix} \zeta_0(x) & \zeta_1(x) & \zeta_2(x) \dots \zeta_{p-1}(x) \\ \zeta_{p-1}(x) & \zeta_0(x) & \zeta_1(x) \dots \zeta_{p-2}(x) \\ \zeta_{p-2}(x) & \zeta_{p-1}(x) & \zeta_0(x) \dots \zeta_{p-3}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \zeta_1(x) & \zeta_2(x) & \zeta_3(x) \dots \zeta_0(x) \end{vmatrix},$$

ma per la formula di LIOUVILLE ([2]) è;

$$W(x)=W(\alpha)\cdot e^{\int_\alpha^x O dx}=W(\alpha),$$

quindi, tenendo presenti le (6), si ottiene $W(x)\equiv 1$.

Ne segue che le funzioni $\zeta_0(x), \dots, \zeta_{p-1}(x)$ costituiscono un *sistema integrale fondamentale* della (7) il cui integrale generale è dato perciò da:

$$\zeta(x)=c_1\zeta_0(z)+c_2\zeta_1'(x)+\dots+c_p\zeta_{p-1}(x),$$

con $c_1, c_2, \dots, c_p$ costanti arbitrarie.

Si ha infine, risolvendo la (7) con le condizioni iniziali:

$$\zeta_p(x)=\frac{1}{p}\cdot\sum_{k=0}^{p-1}\varepsilon^{k(p-r)}e^{\varepsilon^k(x-\alpha)}, \quad (r=0, 1, \dots, p-1),$$