Marialuisa De Socio

Un teorema sul campo elettromagnetico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.4, p. 423–427.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_423_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Un teorema sul campo elettromagnetico.

Nota di MARIALUISA DE SOCIO (a Bologna).

Sunto. - *Come il 1° paragrafo.*

1. Nella presente nota dimostreremo il teorema: *se un campo elettromagnetico regolare è, in ogni istante, tangente* [1] *a una superficie chiusa o aperta (in quest'ultimo caso però a connessione semplice e con l'orlo su un conduttore perfetto) il flusso del vettore di Poynting attraverso quella superficie è sempre nullo.*

Come conseguenza del predetto teorema proveremo, in primo luogo, che in una guida d'onda qualsiasi (anche con asse curvo e

(5) Cf. H. J. TALLQUIST, *Sechsstellige Tafeln der 32 ersten Kugelfunktionen* $P_n(\cos\vartheta)$, « Acta Soc. Sc. Fennicae », Nova series, II, n. 11, (1938), pp. 35 e 36. L. J. COMRIE, *Mathematical Tables*, London, 1949, pp. 26 e 32.

(6) Si può col seguente procedimento maggiorare h_1. Si ha dalle tavole citate in (5) $0{,}992545 < \alpha_{1,32} < 0{,}993239$, ed in $(\alpha_{1,32}, 0{,}993239)$ la derivata prima di $P_{32}(x)$ è positiva e crescente. Ne risulta

$$\mu_{1,32} < -P_{32}(0{,}993239) + (0{,}093239 - 0{,}992545)P'_{32}(0{,}993239);$$

e facendo in $P'_n(x) = n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)]/(1-x^2)$, $x = 0{,}993239$, ne viene $\mu_{1,32} < 0{,}40671$ e perciò:

$$0{,}40671 > h_1 > 0{,}39983.$$

(1) Un campo elettromagnetico si dirà tangente ad una superficie quando tali sono sia il vettore elettrico che quello magnetico. In tutte le conside-

riempita da un mezzo eterogeneo, però, almeno lievemente, conduttore), ma a pareti perfettamente conduttrici e con sezione a connessione semplice [2], non esiste più di una sezione a cui sia tangente, in ogni istante, un campo elettromagnetico armonico che si propaga nella guida stessa.

Dimostreremo poi che un campo elettromagnetico propagantesi liberamente nello spazio non è tangente, in ogni istante, ad una superficie chiusa fissa. Potremo così concludere che, nei due casi molto generali sopra considerati, non si possono avere, almeno nel senso che preciseremo, onde T. E. M., ossia onde rigorosamente trasversali.

Estenderemo infine un teorema di unicità dimostrato di recente dal GRAFFI [3].

2. Sia σ una superficie del tipo citato nell'enunciato del teorema, a cui un campo elettromagnetico $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ risulti tangente.

Per la prima equazione di MAXWELL la circuitazione del vettore intensità del campo magnetico, $\boldsymbol{H}$, lungo una linea chiusa e tracciata su σ è uguale al flusso di $\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \gamma \boldsymbol{E}$ (ε costante dielettrica, γ conduttività, t tempo) attraverso la porzione di σ delimitata da quella linea (ricordiamo che σ è a connessione semplice). Poichè il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ è tangente a σ, si ha che la circuitazione di $\boldsymbol{H}$ lungo una qualunque linea chiusa di σ risulta nulla; $\boldsymbol{H}$ deriva quindi da un potenziale monodromo ψ definito sulla superficie σ, cioè si può scrivere:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{grad}_\sigma \psi$$

dove con $\operatorname{grad}_\sigma \psi$ indichiamo il gradiente superficiale di ψ conforme alla definizione del BURGATTI [4]. Analogamente abbiamo:

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}_\sigma \varphi.$$

(2) Per sezione di una guida intenderemo una superficie aperta, che spezzi la guida in due tronchi e che abbia l'orlo sul contorno di questa. La sezione di una guida è a connessione semplice quando è limitata da un solo conduttore perfetto. Escludiamo ad es. dal nostro studio il cavo coassiale.

(3) D. GRAFFI, *Un teorema di unicità per le equazioni di Maxwell e sue applicazioni alla teoria delle guide d'onda*, « Memoria dell'Accademia delle Scienze di Bologna ». Serie X. Tomo VIII, 1950-1951.

(4) BURGATTI, *Il teorema del gradiente, della divergenza, della rotazione sopra una superficie e loro applicazione ai potenziali*, « Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna ». Serie VII. Tomo IV, 1916-1917, pagg. 3-12. Opp.: « Memorie scelte ». Zanichelli, Bologna 1950, pagg. 201-212.

Ciò premesso e indicato con $\boldsymbol{n}$ il versore normale a σ in ogni suo punto, si ha:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} &= \operatorname{grad}_\sigma \varphi \wedge \operatorname{grad}_\sigma \psi \times \boldsymbol{n} = \operatorname{grad}_\sigma \psi \times \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma \varphi = {}^{(5)}\\ &= \operatorname{div}_\sigma (\psi\, \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma \varphi) - \psi \operatorname{div}_\sigma (\boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma \varphi) = {}^{(6)}\\ &= \operatorname{div}_\sigma (\psi \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma \varphi) - \psi \operatorname{rot}_\sigma \boldsymbol{n} \times \operatorname{grad}_\sigma \varphi + \psi \boldsymbol{n} \times \operatorname{rot}_\sigma \operatorname{grad}_\sigma \varphi = {}^{(7)}\\ &= \operatorname{div}_\sigma (\psi \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma \varphi).\end{aligned}$$

Allora, indicato con s il contorno di σ, supposta per ora aperta, con $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{t}$ due versori definiti in ogni punto di s: $\boldsymbol{v}$ normale a s, tangente a σ e diretto verso l'interno di σ; $\boldsymbol{t}$ tangente a s e tale che $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n}$, abbiamo per il teorema del BURGATTI sulla divergenza superficiale [8]:

$$\begin{aligned}\int_\sigma \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma &= \int_\sigma \operatorname{div}_\sigma (\psi \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma \varphi)\, d\sigma = \int_\sigma (\psi \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma \varphi \times \boldsymbol{n}) \operatorname{div} \boldsymbol{n}\, d\sigma -\\ -\int_s \psi \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma \varphi \times \boldsymbol{v}\, ds &= -\int_s \psi \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n} \times \operatorname{grad}_\sigma \varphi\, ds = -\int_s \psi \operatorname{grad}_\sigma \varphi \times \boldsymbol{t}\, ds.\end{aligned}$$

Ma, in quanto s è tracciato su un conduttore perfetto, $\operatorname{grad}_\sigma \varphi \times \boldsymbol{t}$, che vale la componente del campo elettrico lungo s, è nullo.

Il teorema enunciato nel primo paragrafo è perciò dimostrato nell'ipotesi che σ sia aperta, ma la dimostrazione fatta vale ancora se σ è chiusa, perchè in questo caso l'integrale esteso a σ della divergenza superficiale di un vettore è nullo, come si trova facilmente dividendo mediante una linea chiusa la superficie in

(5) Vedi, nel secondo testo citato nella nota (4), la formula (5).

(6) Infatti se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono due vettori generici e P un punto della σ si ha dalla nota citata del BURGATTI:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_\sigma (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) &= \operatorname{div} (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) - \left[\frac{d(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})}{dP} \boldsymbol{n}\right] \times \boldsymbol{n} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} - \left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \boldsymbol{n}\right) \wedge \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} -\\ &- \boldsymbol{u} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \wedge \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{n}\right) \times \boldsymbol{n} = \left[\operatorname{rot} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{n} \wedge \left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \boldsymbol{n}\right)\right] \times \boldsymbol{v} -\\ &- \boldsymbol{u} \times \left[\operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{n} \wedge \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{n}\right)\right] = \operatorname{rot}_\sigma \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} - \operatorname{rot}_\sigma \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

(7) Si ha infatti: $\operatorname{rot}_\sigma \boldsymbol{n} = 0$. Vedi: BURGATTI, *Elementi di calcolo vettoriale e omografico*. Hoepli, Milano, 1937, pagg. 148-149.

Si tenga presente che $\boldsymbol{n}$ è definito solo su σ, quindi per le solite convenzioni: $\operatorname{rot}_\sigma \boldsymbol{n} = \operatorname{rot} \boldsymbol{n}$. Si ha poi: $\operatorname{rot}_\sigma \operatorname{grad}_\sigma \varphi \times \boldsymbol{n} = \operatorname{rot}_\sigma \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} = \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} = \mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \times \boldsymbol{n} = 0$, perchè $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$ è tangente a σ.

(8) Vedi lavoro citato nella nota (4), formula (10).

due parti, applicando ad ambedue il teorema del BURGATTI e poi sommando i risultati ottenuti.

3. Dimostriamo ora le conseguenze del teorema, esposte nel primo paragrafo.

Si abbia una guida, del tipo già considerato, in cui si propaghi un' onda elettromagnetica armonica e si supponga per assurdo che esistano almeno due sezioni sempre tangenti al campo elettromagnetico. Allora nella regione della guida racchiusa da esse e dalle pareti non entrerebbe energia (perchè per il teorema precedente il flusso del vettore di POYNTING sulle sezioni è nullo, come è nullo sulla parete, in quanto perfettamente conduttrice), perciò l' energia dissipata in un periodo per calore di JOULE dovrebbe essere nulla. Ora, poichè la conduttività del mezzo si suppone sempre diversa da zero, il campo elettromagnetico dovrebbe essere nullo nella predetta regione, cioè nella guida non si propagherebbero onde. Esiste quindi, conforme a quanto si è detto in principio, al più una sezione tangente al campo elettromagnetico.

Consideriamo ora un' onda elettromagnetica propagantesi liberamente nello spazio, intendendo con ciò che si propaga in un dominio D esterno alla regione in cui si trovano le sorgenti che lo generano; non sono necessarie ipotesi sul mezzo isotropo che riempie quel dominio.

Ammetteremo, il che non è affatto restrittivo dal punto di vista fisico, che il campo elettromagnetico in tutto D sia nullo all' istante iniziale. Supposto, per assurdo, che esista una superficie chiusa fissa σ di D sempre tangente al campo in ogni suo punto, per il teorema dimostrato, il flusso del vettore di POYNTING su σ sarebbe sempre nullo e quindi, per il teorema dell' energia, la variazione dell' energia elettromagnetica del dominio all' esterno di σ sarebbe minore o uguale a zero, a seconda se il mezzo è conduttore o no. Ma l' energia, grandezza sempre positiva o nulla, è nel nostro caso inizialmente uguale a zero, quindi dovrebbe rimanere sempre tale, di conseguenza il campo elettromagnetico sarebbe sempre nullo all' esterno di σ, cioè, contrariamente alle nostre ipotesi, il campo non si propagherebbe liberamente in D.

Possiamo concludere, in particolare, che nei due casi di propagazione sopra considerati non esiste una famiglia di superfici, con l' orlo sulla parete della guida nel primo, chiuse nel secondo caso, a cui il campo elettromagnetico sia tangente in ogni istante.

Ciò porta intanto ad escludere che esista, nei campi elettromagnetici in esame, una famiglia di superfici perpendicolari in ogni loro punto al vettore di POYNTING. Ma vi è di più: se ammetteremo che dopo un certo tempo anche nel secondo caso il campo si possa ritenere armonico e chiamiamo onde T. E. M. quelle per cui il campo elettromagnetico è tangente alle superfici di ugual fase, si ha subito che nei casi considerati non esistono onde T. E. M., se si ammette, come intuitivo, che le superfici di egual fase siano chiuse o terminino sull' orlo della guida.

È bene notare che a questa considerazione non contraddice l' onda T. E. M. trovata da SCHELKUNOFF (9), infatti questa onda sull' asse di simmetria ha il campo elettromagnetico infinito, mentre noi consideriamo solo campi regolari.

4. Dal teorema dimostrato nel § 2 si deduce anche il seguente teorema di unicità: In un dominio D, riempito da un mezzo (anche lievemente) conduttore, limitato in parte da un conduttore perfetto, nel rimanente da due superfici σ_1 e σ_2 a connessione semplice, un campo elettromagnetico armonico è determinato univocamente dalle componenti normali su σ_1 e σ_2 del vettore elettrico e di quello magnetico.

Si generalizza così, come si è detto, un teorema che il GRAFFI (10) ha trovato supponendo le superfici σ_1 e σ_2 piane.

Per la dimostrazione si procede al solito per assurdo. Siano: $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$; $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{h}$ due eventuali campi elettromagnetici in D compatibili con le condizioni al contorno. Per la linearità delle equazioni di MAXWELL anche $\boldsymbol{e}$ ed $\boldsymbol{h}$ soddisfano a queste equazioni, sicchè varrà in particolare per essi il teorema di POYNTING nella formula solita. Ma, per quanto si è provato poco fa, il flusso di $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{h}$ attraverso le superfici che limitano D è nullo, sicchè si avrà appunto dal teorema di POYNTING, se T indica il periodo del campo supposto armonico, γ la conduttività del mezzo entro D, v il suo volume:

$$\int_0^T dt \int_v \gamma e^2 dv = 0$$

Da ciò, in ogni istante e per ogni punto, $\boldsymbol{e}=0$; di conseguenza dalla seconda equazione di MAXWELL anche $\boldsymbol{h}=0$.

Il teorema di unicità rimane così provato nel caso che il campo sia armonico e σ_1 e σ_2 a connessione semplice; si può però facilmente estendere (10) al caso in cui le superfici siano a connessione multipla e anche al caso in cui il campo non sia armonico, purchè sia assegnato il suo valore all' istante iniziale.

(9) SCHELKUNOFF, *Electromagnetic waves*, « Van Nostrand Company ». 1948, cap. VIII, § 11 e § 12.

(10) Vedi: GRAFFI nella citata nota (3).