Bollettino
Unione Matematica Italiana

Gaetano Villari

Sugli estremi relativi dei polinomi di Legendre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.4, p. 421–423.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_421_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Sugli estremi relativi dei polinomi di Legendre.

Nota di GAETANO VILLARI (a Firenze).

Sunto. - *Indicando con* $\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \dots, \alpha_{n-1,n}$ $(1 > \alpha_{1,n} > \dots > \alpha_{n-1,n} > -1)$ *gli* $n-1$ *zeri della derivata prima di* $P_n(x)$, *e ponendo* $|P_n(\alpha_{r,n})| = \mu_{r,n}$, *si dimostra che, fissato* r, $\lim\limits_{n=\infty} \mu_{r,n} = h_r > 0$. *In particolare si prova che* $h_1 > 0{,}39983$, $h_2 > 0{,}29408$.

1. Sia $P_n(x)$ il polinomio di LEGENDRE di ordine n:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n ;$$

indichiamo con $\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \dots, \alpha_{n-1,n}$ $(1 > \alpha_{1,n} > \dots > \alpha_{n-1,n} > -1)$ gli $n-1$ zeri della derivata prima di $P_n(x)$ e poniamo

$$|P_n(\alpha_{r,n})| = \mu_{r,n}.$$

È noto che si ha [1]:

$$1 > \mu_{1,n} > \mu_{2,n} > \dots > \mu_{k,n} \qquad k = \left[\frac{n}{2}\right], \tag{1}$$

e che, fissato r, la successione $\{\mu_{r,n}\}$ è decrescente al crescere di n [2]:

$$\mu_{r,n} > \mu_{r,n+1} \qquad (n = r+1,\ r+2, \dots). \tag{2}$$

Qui preciseremo il comportamento della successione $\{\mu_{r,n}\}$ dimostrando che, fissato r, risulta:

$$i) \qquad \lim_{n=\infty} \mu_{r,n} = h_r > 0 ;$$

in particolare, per $r = 1, 2$, valgono le limitazioni

$$ii) \qquad h_1 > 0{,}39983, \qquad h_2 > 0{,}29408.$$

2. Per i polinomi $P_n(x)$ sono note le relazioni ricorrenti [3]:

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x), \tag{3}$$

$$(1-x)[P'_{n+1}(x) + P'_n(x)] = (n+1)[P_n(x) - P_{n+1}(x)]. \tag{4}$$

(1) Cfr. G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, New York, 1939, p. 159.

(2) G. SZEGÖ, *On the relative extrema of Legendre Polynomials*, « Boll. Un. Mat. It. », (3), V, (1950), p. 120-121.

(3) Cf. G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, 3ª ediz., Bologna 1952, pp. 197 e 200.

Per $x = \alpha_{r,n}$ $\left(r = 1, 2, ..., \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ otteniamo

$$P'_{n+1}(\alpha_{r,n}) = (n+1)P_n(\alpha_{r,n}),$$
$$(n+1)P_n(\alpha_{r,n}) = (n+1)P_{n+1}(\alpha_{r,n}) + (1-\alpha_{r,n})P'_{n+1}(\alpha_{r,n}),$$

e dal confronto di queste:

$$\alpha_{r,n}P_n(\alpha_{r,n}) = P_{n+1}(\alpha_{r,n}). \tag{5}$$

Poichè $\alpha_{r,n} < \alpha_{r,n+1}$, segue dalla (1) che il valore assunto dal polinomio $P_{n+1}(x)$ in $x = \alpha_{r,n}$ è in valore assoluto minore di quello che assume in $x = \alpha_{r,n+1}$; e si ha pertanto per la (5) e la (2):

$$\mu_{r,n} > \mu_{r,n+1} > \alpha_{r,n}\mu_{r,n}. \tag{6}$$

Fissato r, la successione $\{\alpha_{r,n}\mu_{r,n}\}$ è crescente con n, si ha cioè

$$\alpha_{r,n}\mu_{r,n} < \alpha_{r,n+1}\mu_{r,n+1} \qquad \left(r = 1, 2, ..., \left[\frac{n}{2}\right]\right). \tag{7}$$

Si consideri infatti la funzione

$$g(x) = x^2\left[P^2_n(x) + \frac{(1-x^2)P'^2_n(x)}{(n+1)^2}\right]$$

per la quale si ha (4):

$$g(\alpha_{r,n}) = \alpha^2_{r,n}P^2_n(\alpha_{r,n}), \qquad g(\alpha_{r,n+1}) = \alpha^2_{r,n+1}P^2_{n+1}(\alpha_{r,n+1}),$$
$$g'(x) = \frac{2x^2P'_n(x)P'_{n+1}(x)}{(n+1)^2} + 2xP^2_n(x) + \frac{2x(1-x^2)P'^2_n(x)}{(n+1)^2} =$$
$$= \frac{2x}{(n+1)^2}[xP'_n(x)P'_{n+1}(x) + (n+1)^2P^2_n(x) + (1-x^2)P'^2_n(x)].$$

Poichè dalla (1) si ricava:

$$(n+1)^2P^2_n(x) = P'^2_{n+1}(x) - 2xP'_n(x)P'_{n+1}(x) + x^2P'^2_n(x),$$

otteniamo

$$g'(x) = \frac{2x}{(n+1)^2}[P'^2_{n+1}(x) - xP'_n(x)P'_{n+1}(x) + P'^2_n(x)] =$$
$$= \frac{2x}{(n+1)^2}\left[\left(P'_{n+1}(x) - \frac{x}{2}P'_n(x)\right)^2 + \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)P'^2_n(x)\right].$$

Ne segue che la funzione $g(x)$ è crescente nell'intervallo $(\alpha_{r,n}, \alpha_{r,n+1})$, e se ne deduce la (7).

Si ha pertanto per la (6) e (7) che, *fissato* r, *la successione*

(4) G. Szegö, in loc. cit. in (2), p. 121, considera la funzione in parentesi quadra.

decrescente $\{\mu_{r,n}\}$ *ammette come limite, al crescere di* n, *una costante* $h_r > 0$; *e per qualunque valore di* n, $h_r > \alpha_{r,n}\mu_{r,n}$.

3. In particolare si ha $h_1 > \alpha_{1,32}\mu_{1,32}$, $h_2 > \alpha_{2,32}\mu_{2,32}$, da cui [5]

$$h_1 > 0{,}992546 \cdot 0{,}402839 > 0{,}39983 \quad [6]$$
$$h_2 > 0{,}976296 \cdot 0{,}301222 > 0{,}29408.$$

Concludiamo pertanto che *il segmento che ha i suoi estremi nei punti* $[\alpha_{1,n};\ P_n(\alpha_{1,n})]$, $[\alpha_{2,n};\ P_n(\alpha_{2,n})]$, *cioè nell'ultimo massimo relativo e nell'ultimo minimo relativo dell'intervallo* (0, 1), *si proietta ortogonalmente sulla retta* $x = 1$ *in un segmento che, qualunque sia* n, *ha sempre al suo interno i punti* (1 ; — 0,39983), (1 ; 0,29408).