Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Vaona

Sulle curve di una varietà quasi-asintotica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.4, p. 411–420.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_411_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Sulle curve di una varietà quasi-asintotica.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna).

Sunto. - *Si studiano le curve giacenti su una* V_k *quasi-asintotica* $\sigma^t_{r,s}$ *di una* V_m, *che sono a loro volta quasi-asintotiche per la* V_m *o per la coppia* (V_k, V_m).

1. Data una varietà V_k quasi-asintotica (q. a.) $\sigma^t_{r,s}$ di una V_m può essere in molte questioni interessante sapere se le varietà subordinate della V_k o alcuni sistemi di queste siano a loro volta q. a. per la V_m o per la coppia di varietà (V_k, V_m) (1). Inversamente ci

(1) Per la bibliografia sulle curve e varietà quasi-asintotiche si veda: M. VILLA, *Nuove ricerche nella teoria delle curve quasi-asintotiche,* « Annali di Mat. », (4), **18**, pp. 275-308 (1939); G. VAONA, *Classificazione proiettiva delle varietà quasi-asintotiche,* questo « Bollettino », (3), **7**, pp.

si può anche chiedere se l'esistenza di determinati sistemi di varietà q. a. subordinate di una V_k (giacente su una V_m) sia sufficiente a garantire che la V_k è q. a. per la V_m.

L'interesse della risoluzione di queste questioni appare chiaramente non appena si pensi che ciò può ad es. permettere di ricondurre molti problemi, relativi a varietà q. a. di dimensione k, a problemi relativi a varietà q. a. di dimensione minore, nei quali le difficoltà sono notevolmente inferiori o che sono già stati, in parte, risolti.

Scopo del presente lavoro è quello di stabilire taluni risultati relativi alle curve giacenti su una V_k q. a. di una V_m.

Si prova che una V_k $\sigma^t_{r,s}$ di una V_m, con $s > r+1$, per valori di $t \geq \binom{k+s-1}{s} - k + 1$, possiede sempre certi sistemi di curve q. a. a tre indici $\gamma_{r,s-1,s}$ per (V_k, V_m), mentre per valori di $t < \binom{k+s-1}{s} - k + 1$ non possiede, in generale, curve siffatte.

Esistono però dei tipi particolari di $\sigma^t_{r,s}$ con $t < \binom{k+s-1}{s} - - k + 1$ che posseggono curve $\gamma_{r,s-1,s}$ ed anche esistono tipi di $\sigma^t_{r,s}$ con $t \geq \binom{k+s-1}{s} - k + 1$ che posseggono totalità di $\gamma_{r,s-1,s}$ di dimensioni più elevate dell'ordinario. Servendoci di una classificazione indicata in altro lavoro [2], assegneremo condizioni necessarie e sufficienti affinchè una $\sigma^t_{r,s}$ possieda determinati sistemi di $\gamma_{r,s-1,s}$.

Infine, per $t \geq \binom{k+s-1}{s} - k + 1$ e sotto ipotesi molto generali, risolveremo il problema inverso; dimostreremo cioè che l'esisistenza su una V_k di determinati sistemi di $\gamma_{r,s-1,s}$ per (V_k, V_m) è condizione sufficiente perchè la V_k sia q. a. $\sigma^t_{r,s}$ per la V_m.

Per $r = s - 1$ sussistono risultati analoghi ai precedenti salvo la sostituzione delle curve q. a. a tre indici $\gamma_{r,s-1,s}$ di (V_k, V_m) con curve q. a. a due indici $\gamma_{s-1,s}$ di V_m.

2. *Equazioni differenziali delle curve q. a.* $\gamma_{r,s-1,s}$ *giacenti su una* V_k *q. a.* $\sigma^t_{r,s}$ *di una* V_m.

Per la nozione di varietà q. a. a più indici si veda: M. VILLA e G. VAONA, *Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend », (8), 8, pp. 470-476 (1950).

(2) Si veda: G. VAONA, op. cit. in (1).

Consideriamo la V_m descritta dal punto

(1) $$x = x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$

e supponiamo che su essa esista una V_k q. a. $\sigma^t{}_{r,s}(s > r + 1)$. Si può ovviamente sempre fare in modo che la V_k sia quella ottenuta ponendo in (1)

(2) $$\tau_{k+1} = \tau_{k+2} = \dots = \tau_m = 0.$$

Affinchè la V_k (2) sia q. a. $\sigma^t{}_{r,s}$ per la V_m (1), occorre e basta che, per una k-pla generica di valori delle $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, la matrice

(3) $$\left\| \begin{matrix} S(r) \\ A(r+1) \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ A(s-1) \\ A(s) \end{matrix} \right\|$$

abbia caratteristica c data da

(4) $$c = \binom{m+r}{r} + \binom{k+s}{s} - \binom{k+r}{r} - t.$$

Nella (3) si sono indicati con $S(r)$ le $\binom{m+r}{r}$ righe costituite dal punto x e dai derivati primi, secondi, ..., r-esimi di x rispetto alla V_m, con $A(r+1)$ le $\binom{k+r}{r+1}$ righe costituite dai punti derivati $(r+1)$-esimi di x rispetto alla V_k, ed analogamente per $A(r+2), \dots, A(s)$.

Indicando con $x^{i_1 i_2 \dots i_s}$ i punti derivati s-esimi di x sulla V_k, essendo $i_1, i_2, \dots, i_s$ una qualunque combinazione con ripetizione di classe s dei numeri 1, 2, ..., k, se la matrice (3) ha esattamente caratteristica c data dalla (4), ne consegue l'esistenza di t relazioni del tipo

(5) $$\Sigma_{i_1 i_2 \dots i_s} a^{(j)}{}_{i_1 i_2 \dots i_s} x^{i_1 i_2 \dots i_s} + [S(r), A(r+1), \dots, A(s-1)]^{(j)} = 0$$
$$(j = 1, 2 \dots, t),$$

essendo le $a^{(j)}$ funzioni di $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ non tutte identicamente nulle ed indicando con $[S(r), A(r+1), \dots, A(s-1]^{(j)}$ una combinazione lineare dei punti rappresentati da quei simboli.

Affinché la curva della V_k, ottenuta ponendo

(6) $$\tau_i = \tau_i(t) \qquad (i = 1, 2, \dots, k),$$

sia q. a. $\gamma_{r,s-1,s}$ per (V_k, V_m) occorre siano nulli tutti i minori di ordine massimo estratti dalla matrice

$$(7)\qquad \left\|\begin{matrix} S(r) \\ A(r+1) \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ A(s-1) \\ \Sigma\, x^{i_1 i_2 \dots i_s}\tau'_{i_1}\tau'_{i_2}\dots\tau'_{i_s} \end{matrix}\right\|.$$

Ma l'annullarsi della (7) implica l'esistenza di una relazione del tipo

$$(8)\qquad \Sigma\, x^{i_1 i_2 \dots i_s}\tau'_{i_1}\tau'_{i_2}\dots\tau'_{i_s} + [S(r),\ A(r+1), \dots, A(s-1)] = 0.$$

Ora si osservi che la (8) deve essere linearmente dipendente dalle relazioni ottenute dalle (5) per $\tau_\iota = \tau_\iota(t)$, poichè, nel caso opposto, la V_k avrebbe nei punti della curva (6) comportamento q. a. di specie superiore a t, fatto che qui escludiamo ([3]). Ne segue che dovranno essere nulli tutti i minori di ordine $t+1$ estratti dalla matrice dei coefficienti delle combinazioni lineari (5) e (8); ed in particolare dovranno essere nulli i minori di ordine $t+1$ estratti dalla matrice dei coefficienti degli $x^{i_1 i_2 \dots i_s}$. Tale matrice è

$$(9)\qquad \left\|\begin{matrix} \tau'_{i_1}\tau'_{i_2}\dots\tau'_{i_s} \\ a^{(1)}{}_{i_1 i_2 \dots i_s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a^{(t)}{}_{i_1 i_2 \dots i_s} \end{matrix}\right\|.$$

Inversamente l'annullarsi della (9) è condizione sufficiente perchè la curva (6) sia $\gamma_{r,s-1,s}$ di (V_k, V_m). Infatti se è nulla la (9) devono annullarsi di conseguenza i rimanenti minori estratti dalla matrice dei coefficienti delle (5) e (8) poichè, nel caso opposto, la V_k avrebbe lungo la curva comportamento q. a. di indici inferiori ad r e s, cosa che qui escludiamo ([4]).

3. *Curve q. a.* $\gamma_{r,s-1,s}$ *giacenti su una* V_k *q. a.* $\sigma^t{}_{r,s}$ *di una* V_m, *nel caso generale.*

Facciamo qui l'ipotesi che la V_k sia una q. a. $\sigma^t{}_{r,s}$ generica ([5]),

([3]) Poichè nelle considerazioni qui fatte intervengono sistemi di curve che ricoprono tutta la varietà, e non ci occupiamo dei casi opposti, si rende necessaria l'esclusione fatta perchè la V_k non sia di specie $> t$.

([4]) Vale un'osservazione analoga alla ([3]).

([5]) Nel n. 5 verrà precisato che cosa si intenda per $\sigma^t{}_{r,s}$ generica.

e distinguiamo tre casi

$$1^\circ)\qquad t=\binom{k+s-1}{s},$$

$$2^\circ)\qquad \binom{k+s-1}{s}-k+1\leq t<\binom{k+s-1}{s},$$

$$3^\circ)\qquad 1\leq t<\binom{k+s-1}{s}-k+1.$$

Nel 1° caso la V_k è $\sigma_{r,s}$ di specie t massima ed è allora evidente che ogni sua curva è $\gamma_{r,s-1,s}$.

Nei rimanenti due casi osserviamo che la matrice (9) è costituita da $t+1$ righe e $\binom{k+s-1}{s}$ colonne. Annullando i minori di ordine $t+1$ si ottengono esattamente $\binom{k+s-1}{s}-t$ equazioni differenziali del 1° ordine, fra loro linearmente indipendenti, ciascuna di esse omogenea di grado s in $\tau_1', \tau_2', \dots, \tau_k'$.

Si può togliere l'omogeneità ponendo ad es. $\tau_1=t$. Si ottengono così $\binom{k+s-1}{s}-t$ equazioni differenziali del 1° ordine in $k-1$ funzioni incognite essenziali. Si può allora concludere col teorema:

Data una V_k *q. a.* $\sigma^t_{r,s}$ *di una* V_m $(s>r+1)$ *si ha, in generale, che: se* $t=\binom{k+s-1}{s}$, *ogni curva di* V_k *è q. a.* $\gamma_{r,s-1,s}$ *di* (V_k, V_m); *se* $\binom{k+s-1}{s}-k+1\leq t<\binom{k+s-1}{s}$, *esistono sulla* V_k *infinite curve* $\gamma_{r,s-1,s}$ *dipendenti da* $k+t-\binom{k+s-1}{s}-1$ *funzioni arbitrarie di un argomento* [*da* $k-1$ *costanti arbitrarie per* $t=\binom{k+s-1}{s}-k+1$]; *se infine* $1\leq t<\binom{k+s-1}{s}-k+1$, *non esistono sulla* V_k *curve q. a.* $\gamma_{r,s-1,s}$.

Il precedente risultato si può ulteriormente precisare, ricorrendo alla nozione di elemento differenziale di curva e calotta di varietà q. a. [6]. Si ha così:

[6] La nozione di elemento differenziale di curva q. a. è stata posta dal VILLA e dallo stesso è stata utilizzata in vari importanti lavori. Si veda ad es. M. VILLA, *Ricerche sulle varietà* V_k *che posseggono* $\infty^\delta E_2$ *di* $\gamma_{1,3}$ *con particolare riguardo al caso* $k=4$, $\delta=8$, « Mem. dell'Accad. Naz. Lincei », (6), 7, pp. 373-427 (1939).

Si dice che una calotta, di dimensione k e ordine h, è q. a. di $\sigma^t_{r,s}$ di

Data una V_k *giacente su una* V_m, *se una calotta della* V_k *di centro* P *e ordine* s *è q. a.* $\sigma^t_{r,s}$ *per la* V_m, *si ha, in generale, che: se* $t = \binom{k+s-1}{s}$, *ogni* E_1 *di centro* P *appartenente alla calotta è* E_1 *di* $\gamma_{r,s-1,s}$ *di* (V_k, V_m); *se* $\binom{k+s-1}{s} - k + 1 \leq t < \binom{k+s-1}{s}$, *esistono infiniti* E_1 *di* $\gamma_{r,s-1,s}$ *di centro P appartenenti alla calotta, e le rette che li contengono costituiscono un cono* V^n_N *con* $N = k + t - \binom{k+s-1}{s}$ *ed* $n = s^{k-N}$; *se infine* $1 \leq t < \binom{k+s+1}{s} - k + 1$ *non esistono sulla calotta* E_1 *di* $\gamma_{r,s-1,s}$.

4 *Un carattere aritmetico delle varietà q. a.*

I teoremi del n. precedente si riferiscono ad una V_k q. a. generica; è però evidente che, in casi particolari, anche se $t < \binom{k+s-1}{s} - k + 1$ possono esistere curve q. a. $\gamma_{r,s-1,s}$, come anche se $t \geq \binom{k+s-1}{s} - k + 1$ possono esistere curve q. a. $\gamma_{r,s-1,s}$ dipendenti da funzioni arbitrarie in numero maggiore dell'ordinario. Di qui la necessità di stabilire condizioni necessarie e sufficienti affinchè una V_k $\sigma^t_{r,s}$ possegga determinati sistemi di $\gamma_{r,s-1,s}$.

È d'altra parte chiaro come non bastino allo scopo i caratteri r, s, t della q. a. e come quindi occorra introdurre qualche nuovo carattere della q. a. stessa.

In un precedente lavoro (7) ho già indicato un modo per classificare dal punto di vista proiettivo le V_k q. a. $\sigma^t_{r,s}$. Ho ivi introdotto un sistema lineare di ipersuperficie associato alla $\sigma^t_{r,s}$ *(sistema lineare associato)*, ed ho dimostrato che ogni proprietà proiettiva di tale sistema è una proprietà proiettiva della $\sigma^t_{r,s}$.

Servendoci di tale sistema possiamo introdurre un nuovo carattere aritmetico, che dirò *caratteristica* della $\sigma^t_{r,s}$, definito nel seguente modo: si consideri il sistema lineare di dimensione t, di ipersuperficie d'ordine s dell'S_{k-1}, associato alla $\sigma^t_{r,s}$; tale sistema può possedere ∞^τ ipersuperficie composte di un iperpiano s-plo; diremo caratteristica della $\sigma^t_{r,s}$ l'intero τ così definito, convenendo

una V_m quando è contenuta da una V_k della V_m il cui $S(s)$ osculatore nel centro della calotta è congiunto allo $S(r)$ osculatore ivi alla V_m da uno spazio di dimensione inferiore alla ordinaria di t unità.

In modo analogo si pone la definizione di calotta q. a. a più indici.

(7) Si veda: G. VAONA, op. cit. in (1).

di porre $\tau = -1$ tutte le volte che non esistono ipersuperficie composte di un iperpiano s-plo.

Si vedrà al n. 5 che la caratteristica τ di una V_k q. a. $\sigma^t{}_{r,s}$, $t < \binom{k+s-1}{s}$, può variare entro i limiti

$$k + t - \binom{k+s-1}{s} - 1 \leq \tau < k - 1,$$

qualora si ponga il 1° membro $= -1$ tutte le volte che esso risulta < -1.

Nel caso $t = \binom{k+s-1}{s}$ la caratteristica $\tau = k - 1$.

5. *Curve q. a.* $\gamma_{r,s-1,s}$ *di una* V_k $\sigma^t{}_{r,s}$ *di caratteristica* τ.

Sussiste il seguente teorema:

Data una V_k *q. a.* $\sigma^t{}_{r,s}$ *di caratteristica* τ *di una* V_m*: se* $\tau > 0$ *essa possiede infinite curve* $\gamma_{r,s-1,s}$ *di* (V_k, V_m) *dipendenti da* τ *funzioni arbitrarie di un argomento; se* $\tau = 0$ *possiede infinite curve* $\gamma_{r,s-1,s}$ *dipendenti da* $k-1$ *costanti arbitrarie; ed infine se* $\tau = -1$ *non possiede alcuna curva* $\gamma_{r,s-1,s}$.

Il precedente teorema è equivalente al seguente:

Data una V_k *giacente su una* V_m*, se una calotta della* V_k*, di centro* P *e ordine* s*, è q. a.* $\sigma^t{}_{r,s}$ *di caratteristica* τ*, si ha che: se* $\tau > 0$ *esistono* ∞^τ E_1 *di* $\gamma_{r,s-1,s}$ *di* (V_k, V_m)*, di centro* P *appartenenti alla calotta; se* $\tau = 0$ *ne esiste un numero finito;* se $\tau = -1$ *non esistono sulla calotta* E_1 *siffatti.*

Dimostriamo il teorema facendo vedere che gli E_1 di $\gamma_{r,s-1,s}$ di (V_k, V_m) sono tanti quanti le ipersuperficie del sistema lineare associato che si spezzano in un iperpiano s-plo.

L'ipersuperficie generica del sistema lineare associato alla calotta $\sigma^t{}_{r,s}$ della V_k considerata ha l'equazione

$$\Sigma_{i_1 i_2 \ldots i_s} (\Sigma_j \lambda_j a^{(j)}{}_{i_1 i_2 \ldots i_s}) y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_s} = 0, \tag{10}$$

λ_j parametri, $j = 1, 2, \ldots, t$. Affinché tale ipersuperficie coincida con l'iperpiano di equazione

$$\Sigma_i \mu_i y_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

contato s volte, occorre sussistano le $\binom{k+s-1}{s}$ relazioni

$$\rho \mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_s} + \Sigma_j \lambda_j a^{(j)}{}_{i_1 i_2 \ldots i_s} = 0,$$

dove $i_1, i_2, \ldots, i_s$ è una qualsiasi combinazione con ripetizione della classe s dei numeri $1, 2, \ldots, k$ e ρ è un fattore non nullo.

Eliminando le λ_j fra tali relazioni, si trova che le μ_i devono soddisfare alle equazioni ottenute annullando i minori di ordine $t+1$ estratti dalla matrice

$$(11) \qquad \left\| \begin{matrix} \mu_{i_1}\mu_{i_2}\dots\mu_{i_s} \\ a^{(1)}{}_{i_1 i_2 \dots i_s} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^{(t)}{}_{i_1 i_2 \dots i_s} \end{matrix} \right\| .$$

Ma la (11) coincide con la (9) onde il teorema.

Siamo ora in grado di precisare il significato della locuzione $\sigma^t{}_{r,s}$ generica. Diremo che una $\sigma^t{}_{r,s}$ è generica quando la sua caratteristica assume il valore minimo compatibile con gli interi k, r, s, t.

6. *Alcuni esempi.*

Interessanti esempi di varietà $\sigma_{1,3}$ q. a. aventi caratteristica dei vari tipi si incontrano sulla V_{2r} di Segre che rappresenta le coppie di punti di due spazi S_r.

Ogni V_r della V_{2r} di Segre rappresenta una trasformazione puntuale T fra i due S_r. Se la trasformazione T è non degenere la V_r è una $\sigma^t{}_{1,3}$ dove t, in generale, vale $\frac{r^3+5r}{6}$ e, in casi particolari, può assumere valori maggiori [8].

Ora è noto che le curve $\gamma_{1,2,3}$ di (V_r, V_{2r}) sono le curve immagini delle coppie di curve caratteristiche di T [9]. Si sa inoltre che le direzioni caratteristiche relative ad una coppia di punti corrispondenti sono, in generale, in numero finito (esattamente 2^r-1); in casi particolari però esse possono essere ∞^τ con $0<\tau\leq r-1$.

Ne segue quindi che una V_r della V_{2r} di Segre è, in generale, una $\sigma^t{}_{1,3}$ $\left(\text{con } t=\frac{r^3+5r}{6}\right)$ di caratteristica $\tau=0$; segue pure che

[8] Se infatti T non è degenere la V_r non può essere $\sigma_{1,2}$; si veda: M. Villa, *Sulle trasformazioni puntuali degeneri*, « Memorie dell'Accad. di Bologna », (9), **9** pp. 19-26 (1942). D'altra parte una V_r di V_{2r} è almeno $\sigma^t{}_{1,3}$ con $t=\frac{r^3+5r}{6}$ poichè la dimensione dello spazio ambiente di V_{2r} è $(r+1)^2-1$, mentre lo spazio congiungente l'$S(1)$ tangente ad una V_{2r} e l'$S(3)$ osculatore ad una V_r, in uno stesso punto, ha ordinariamente dimensione $2r+\binom{r+1}{2}+\binom{r+2}{3}$.

[9] Si veda: M. Villa e G. Vaona, op. cit. in [1].

esistono delle $\sigma^t_{1,3}$ $\left(\text{con } t \geq \frac{r^3+5r}{6}\right)$ aventi caratteristica che può assumere tutti i valori da 0 a $r-1$.

Voglio infine rilevare che, per $r > 2$, le V_r della V_2, di SEGRE non sono delle $\sigma^t_{1,3}$ di tipo generale poichè, in tale caso, dovrebbe loro competere caratteristica $\tau = -1$.

7. *Condizioni affinchè una* V_k *sia q. a.* $\sigma^t_{r,s}$ *di una* V_m.

Nei nn. precedenti siamo riusciti a stabilire in ogni caso quali sistemi di curve $\gamma_{r,s-1,s}$ possegga una V_k q. a. $\sigma^t_{r,s}$ di una V_m. Ma è certo importante vedere se, inversamente, l'esistenza su una V_k (giacente su una V_m) di determinati sistemi di curve $\gamma_{r,s-1,s}$ di (V_k, V_m), sià condizione sufficiente perché la V_k sia q. a. $\sigma^t_{r,s}$ della V_m.

Sussiste a tale riguardo il seguente teorema:

Se per ogni punto di una V_k *giacente su una* V_m *esistono degli* E_1, *tangenti a* V_k, *di* $\gamma_{r,s-1,s}$ *tali che le rette che li contengono costituiscono un cono* V^n_N, *privo di componenti multiple, con* $N = k + t - \binom{k+s-1}{s}$ *ed* $n = s^{k-N}$ *esattamente, la* V_k *è q. a.* $\sigma^t_{r,s}$ *per la* V_m, *di tipo generale.*

Il teorema sussiste per $t \geq \binom{k+s-1}{s} - k + 1$. Per dimostrarlo proveremo che una calotta generica di ordine s della V_k è, nelle ipotesi ammesse, $\sigma^t_{r,s}$ di tipo generale.

Infatti una calotta generica d'ordine s della V_k non può essere q. a. di indici inferiori ad r ed s poiché in tal caso ogni E_1 appartenente alla calotta sarebbe E_1 di $\gamma_{r,s-1,s}$ ([10]). Possedendo poi degli E_1 di $\gamma_{r,s-1,s}$ la calotta è certamente $\sigma_{r,s}$ poiché l'esistenza di ogni E_1 siffatto porta all'esistenza di una relazione lineare fra i punti $S(r)$, $A(r+1), \ldots, A(s)$.

Inoltre la specie della $\sigma_{r,s}$ non può essere $> t$, poiché in tal caso il cono di rette contenente gli E_1 avrebbe dimensione $> N$ (nn. 3 e 5). Supposto poi che la sua specie sia t, essa non può essere di tipo particolare per lo stesso motivo precedente (n. 5).

Rimane da provare che la specie di ogni calotta non può essere $< t$. Si vede subito che, in tale ipotesi, l'ordine del cono V_N sarebbe $< s^{k-N}$. Supponiamo infatti che la specie sia $\bar{t} < t$. Gli E_1 di $\gamma_{r,s-1,s}$ sono rappresentati in tale caso dalle equazioni ottenute

([10]) Tutti gli E_1 sarebbero banali E_1 di $\gamma_{r,s-1,s}$. Si veda: M. VILLA e G. VAONA, op. cit. in ([1]), p. 470 nota ([1]).

annullando i minori di ordine $\bar{t}+1$ estratti dalla matrice (9), ove si ponga $t=\bar{t}$. Le equazioni linearmente indipendenti che così si ottengono sono in numero di $\binom{k+s-1}{s}-\bar{t}$ esattamente [11]. Supposto che il cono da esse rappresentato sia una V_N il suo ordine può essere al più s^{k-N} e ciò si ha quando la V_N è intersezione completa di $k-N$ ipersuperficie rappresentate da $k-N$ di quelle equazioni. Ma perché ciò avvenga occorre d'altra parte che le rimanenti $t-\bar{t}$ ipersuperficie contengano la V_N rappresentata dalle precedenti equazioni.

Ora, nella ipotesi ammessa che la V_N non possegga componenti multiple, la precedente circostanza ha luogo se e solo se quelle $t-\bar{t}$ equazioni sono linearmente dipendenti dalle precedenti [12]. Ma ciò è assurdo e quindi segue l'asserto.

8. *Caso delle* V_k *q. a.* $\sigma^t_{s-1,s}$.

Dalle considerazioni dei nn. precedenti si è escluso il caso $r=s-1$. Se una V_k giacente su una V_m è q. a. $\sigma^t_{s-1,s}$, tutte le volte che la caratteristica $\tau\geq 0$, esistono sulla V_k sistemi di curve q. a. a due indici $\gamma_{s-1,s}$ per la V_m.

Sussiste infatti il teorema:

Data una V_k *q. a.* $\sigma^t_{s-1,s}$ *di caratteristica* τ *di una* V_m*: se* $\tau>0$ *essa possiede infinite curve* $\gamma_{s-1,s}$ *di* V_m *dipendenti da* τ *funzioni arbitrarie di un argomento; se* $\tau=0$ *possiede infinite curve* $\gamma_{s-1,s}$ *dipendenti da* $k-1$ *costanti arbitrarie; se* $\tau=-1$ *non possiede alcuna curva* $\gamma_{s-1,s}$.

Vale poi il teorema:

Se per ogni punto di una V_k *giacente su una* V_m *esistono degli* E_1*, tangenti a* V_k*, di* $\gamma_{s-1,s}$ *per la* V_m*, tali che le rette che li contengono costituiscono un cono* V^n_N*, privo di componenti multiple, con* $N=k+t-\binom{k+s-1}{s}$ *ed* $n=s^{k-N}$ *esattamente, la* V_k *è q. a.* $\sigma^t_{s-1,s}$ *per la* V_m*, di tipo generale.*

Le dimostrazioni di questi teoremi sono identiche a quelle degli analoghi per $r<s-1$, che abbiamo esposte nei nn. precedenti, salvo lievi evidenti modifiche.

(11) Ciò segue dal fatto che le ipersuperficie del sistema lineare associato sono fra loro linearmente indipendenti.

(12) Si veda ad es.: E. Bertini *Geometria proiettiva degli iperspazi*, « Principato », Messina, 2ª Ed. (1923), pp. 311-312.