Bollettino Unione Matematica Italiana

Renato Nardini

Due teoremi di unicità nella magnetodinamica dei fluidi compressibili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.4, p. 403–411.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_403_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Due teoremi di unicità nella magneto-dinamica dei fluidi compressibili.

Nota di Renato Nardini (a Bologna)

Sunto. - *I suddetti teoremi, dimostrati sotto opportune condizioni sufficienti, si riferiscono al caso in cui la derivata del vettore spostamento è o non è trascurabile nei confronti del vettore densità di corrente di conduzione.*

1. Introduzione. — In un precedente lavoro [1] è stata dimostrata l'unicità della soluzione, supposta continua assieme alle sue derivate prime e seconde [2], per le equazioni, considerate con idonee condizioni iniziali e al contorno, della magneto-dinamica di un fluido omogeneo, incompressibile, viscoso, elettricamente conduttore; ciò è stato fatto considerando separatamente i due casi a seconda che la derivata del vettore spostamento è o non è trascurabile nei confronti del vettore i densità di corrente di conduzione.

Ci si propone ora di estendere le dette dimostrazioni al caso di fluidi compressibili barotropici; nel procedimento adottato si terrà conto anche di un recente lavoro di D. Graffi [3], del quale si utilizzeranno i risultati di alcuni eleganti sviluppi di calcolo.

(1) R. Nardini, *Due teoremi di unicità nella teoria delle onde magneto-idrodinamiche*, « Rend. Sem. Mat. Un. Padova », 20 (1952). Tale lavoro sarà indicato in seguito con (L).

(2) Le derivate seconde vanno considerate solo rispetto alle coordinate e non rispetto al tempo.

(3) D. Graffi, *Il teorema di unicità nella dinamica dei fluidi compres-*

2. Equazioni che rappresentano il fenomeno. — Indichiamo con ε la costante dielettrica, con μ la permeabilità magnetica, con γ la conducibilità elettrica (tutte supposte costanti) e con ρ la densità del fluido; $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ siano campo elettrico e magnetico, $\boldsymbol{v}$ la velocità, p la pressione in punto generico P del dominio $\mathfrak{D}$ in cui si trova il fluido, $\boldsymbol{F}$, assegnata quale funzione di ρ, P e t, sia la forza esterna non elettromagnetica che agisce sull'unità di volume del fluido.

Le equazioni magneto-idrodinamiche sono [1]

$$(1)\qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad (2)\quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$(3)\qquad \boldsymbol{i} = \gamma(\boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}), \qquad (4)\quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$$

$$(5)\qquad \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} p + \mu \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{H} + \boldsymbol{F} + \operatorname{grad} \beta$$

$$(6)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \qquad (7)\quad p = f(\rho);$$

β rappresenta il tensore dovuto alla viscosità ed esplicitamente ha la forma

$$(8)\qquad \beta = 2\nu D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} + \nu' \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

dove ν e ν' sono i coefficienti di viscosità del fluido.

3. Enunciato del teorema I. — Tratteremo ora il caso in cui $\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ si consideri trascurabile rispetto ad $\boldsymbol{i}$. Anzitutto si può eliminare $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{E}$ e p fra le equazioni (1), (2), (3), (5) e (7) sostituendole con le equazioni

$$(9)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\gamma} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H})$$

$$(10)\qquad \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{v} - f'(\rho) \operatorname{grad} \rho + \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} + \boldsymbol{F} + \operatorname{grad} \beta.$$

Si considerino ora le equazioni (4), (6), (9) e (10), con la posizione (8), nel campo quadrimensionale $\mathfrak{C}$ costituito dall'insieme dei punti P appartenenti al dominio $\mathfrak{D}$ e dagli istanti t compresi nell'intervallo $(0, T)$, dove T è un valore finito del tempo che può essere preso grande quanto si vuole; se ne dimostra l'unicità della soluzione sotto le seguenti ipotesi:

[1] Si veda ad es. H. ALFVÉN, *Cosmical electrodynamics*, Oxford at the Clarendon, 1950, cap. IV.

I. *Ipotesi fisiche.* – La densità ρ sia sempre positiva in $\mathcal{C}$, quindi per la sua continuità esisterà un numero m positivo tale che sia sempre

$$\rho \geq m ; \tag{11}$$

per ogni ρ la $f(\rho)$ e la sua derivata $f'(\rho)$ siano funzioni continue e positive, mentre $f''(\rho)$ sia continua; i coefficienti di viscosità ν e ν' siano indipendenti da ρ; la $\boldsymbol{F}(P, t, \rho)$ e la sua derivata parziale $\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \rho}$ siano in $\mathcal{C}$ funzioni continue e limitate; nel fluido si abbia sempre energia dissipata per viscosità cioè sia $I_1\left(\beta D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right) \geq 0$.

II. *Ipotesi di regolarità.* – Si prenderà in considerazione solo il caso in cui $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{v}$ e ρ (e perciò anche p) siano in $\mathcal{C}$ funzioni continue assieme alle loro derivate prime, mentre le derivate seconde di $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{v}$ atte rispetto alle coordinate siano continue nelle coordinate stesse. ([5])

III. *Condizioni iniziali.* – Siano assegnati per $t = 0$ i valori di $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{v}$ e ρ in tutto $\mathfrak{D}$.

IV. *Condizioni al contorno.* – Se $\mathfrak{D}$ è finito e σ è la superficie che lo limita, siano assegnati in ogni punto di σ e per ogni $t > 0$ la componente tangenziale di $\boldsymbol{H}$ e la velocità $\boldsymbol{v}$; dove $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}$ è negativo ($\boldsymbol{n}$ versore normale a σ diretto verso l' esterno di $\mathfrak{D}$), cioè nei punti di σ in cui entra del fluido, siano assegnati ρ ed anche la componente normale di $\boldsymbol{H}$. Per i fluidi perfetti ci si può anche limitare ad assegnare su σ la componente tangenziale di $\boldsymbol{H}$ e il valore di $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}$, supponendolo ovunque positivo o nullo (cioè si ammette che il fluido non possa entrare in $\mathfrak{D}$).

Se poi $\mathfrak{D}$ si estende all' infinito basterà aggiungere opportune *condizioni di convergenza all' infinito*; si può supporre per esempio che in ogni istante la differenza fra $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{v}$ e ρ e i valori assegnati all' infinito per tali grandezze risulti infinitesima di ordine numerico maggiore di $\frac{3}{2}$ mentre rot $\boldsymbol{H}$ e le componenti dell' omografia β siano infinitesime dell' ordine numerico $\geq \frac{1}{2}$.

4. Dimostrazione del teorema I. – Supponiamo che esistano due soluzioni delle (4), (6), (9) e (10) soddisfacenti a tutte le condizioni precedentemente esposte: le indicheremo con $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{v}$, ρ, rispet-

([5]) Se il fluido è perfetto non occorre alcuna ipotesi sulle derivate seconde di $\boldsymbol{v}$.

tivamente con $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1$, $\rho+\rho_1$. Ci proponiamo di dimostrare che le loro corrispondenti differenze e cioè $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{v}_1$, ρ_1 risultano identicamente nulle nel campo $\mathfrak{C}$.

Si verifica facilmente che per $t=0$, deve essere $\boldsymbol{H}_1\equiv 0$, $\boldsymbol{v}_1\equiv 0$ e $\rho_1\equiv 0$ in tutto $\mathfrak{D}$, mentre per $t>0$ su σ è $\boldsymbol{v}_1\equiv 0$, $\boldsymbol{H}_1$ normale a σ ed è anzi $\boldsymbol{H}_1\equiv 0$ e $\rho_1\equiv 0$ dove $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}$ è negativo; per i fluidi perfetti su σ si ha soltanto $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{n}\equiv 0$ (essendo assegnato $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\geq 0$ come si è supposto).

Introducendo poi successivamente le due soluzioni nelle (9), (6) e (4) e sottraendo membro a membro le corrispondenti equazioni, si ottiene

$$(12)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}_1}{\partial t}=-\frac{1}{\mu\gamma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1+\operatorname{rot}[(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v})\wedge\boldsymbol{H}_1]+\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{H})$$

$$(13)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}[(\rho+\rho_1)\boldsymbol{v}_1]+\operatorname{div}(\rho_1\boldsymbol{v})=0,\qquad (14)\quad \operatorname{div}\boldsymbol{H}_1=0.$$

Eseguiamo la medesima operazione sulla (10) e aggiungiamo a primo e secondo membro il termine $\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{v}_1$; posto per brevità [6]

$$(15)\qquad \Phi=\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{v}_1-\rho_1\frac{\partial(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{\partial t}-\rho_1\frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)-\rho\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dP}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)-$$
$$-\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1+[f'(\rho)-f'(\rho+\rho_1)]\operatorname{grad}\rho+\boldsymbol{F}(\rho+\rho_1)-\boldsymbol{F}(\rho)+\operatorname{grad}\beta_1$$

si ottiene l'equazione

$$16)\qquad \rho\frac{\partial\boldsymbol{v}_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{v}_1=\Phi-f'(\rho+\rho_1)\operatorname{grad}\rho_1+\mu[\operatorname{rot}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1)\wedge\boldsymbol{H}_1+\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1\wedge\boldsymbol{H}].$$

Si moltiplichi ora la (12) scalarmente per $\boldsymbol{H}_1$ e si integri l'equazione così ottenuta su tutto il volume V del dominio $\mathfrak{D}$; senza riportare in formule tale operazione, elenchiamo alcune trasformazioni da eseguirsi sui termini che così si ottengono. Tenendo presente la (14) si ricava

$$\operatorname{rot}[(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\wedge\boldsymbol{H}_1]\times\boldsymbol{H}_1=\frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP}\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{H}_1-$$
$$-\frac{d\boldsymbol{H}_1}{dP}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\times\boldsymbol{H}_1-H_1^2\operatorname{div}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)$$

[6] $\boldsymbol{F}(\rho+\rho_1)$ sta per $\boldsymbol{F}(\rho+\rho_1, P, t)$, $\boldsymbol{F}(\rho)$ sta per $\boldsymbol{F}(\rho, P, t)$; inoltre è

$$\beta_1=2\nu D\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dP}+\nu'\operatorname{div}\boldsymbol{v}_1.$$

e ancora

$$-\frac{d\boldsymbol{H}_1}{dP}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\times\boldsymbol{H}_1=-K\frac{d\boldsymbol{H}_1}{dP}\boldsymbol{H}_1\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)=-\frac{1}{2}\operatorname{grad}H_1^2\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)$$
$$=-\frac{1}{2}\operatorname{div}[H_1^2(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)]+\frac{H_1^2}{2}\operatorname{div}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1);$$

essendo per le condizioni al contorno

$$\int_V \operatorname{div}[H_1^2(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)]\,dV=\int_\sigma H_1^2(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\times\boldsymbol{n}\,d\sigma\geq 0,$$

si ha

$$\int_V \operatorname{rot}[(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}_1)\wedge\boldsymbol{H}_1]\times\boldsymbol{H}_1 dV\leq \tag{17}$$
$$\leq\int_V\frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP}\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{H}_1 dV-\frac{1}{2}\int_V H_1^2\operatorname{div}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)dV.$$

Poichè d' altra parte, per le ipotesi di regolarità, le derivate prime di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}_1$ sono limitate, indichiamo con N_1 l' estremo superiore in $\mathcal{C}$ di $\frac{1}{2}\,|\operatorname{div}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)|$; richiamiamo poi i seguenti risultati già introdotti in (L):

a) esiste un numero N_2 per cui in $\mathcal{C}$ si ha

$$\left|\frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP}\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{H}_1\right|\leq N_2 H_1^2 \tag{18}$$

b) è inoltre

$$-\int_V\frac{1}{\mu\gamma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{H}_1 dV\leq 0 \quad (^7) \tag{19}$$

$$\int_V \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}_1 dV\leq\int_V\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{H}\,dV=-A(t). \tag{20}$$

Da (17), (18), (19) e (20) si conclude allora che la (12), sottoposta all' operazione suddetta, fornisce la seguente disuguaglianza

$$\frac{1}{2}\int_V\frac{\partial H_1^2}{\partial t}dV\leq(N_1+N_2)\int_V H_1^2 dV-A(t). \tag{21}$$

(7) Il termine moltiplicato per $\frac{1}{\mu\gamma}$ non dà quindi alcun contributo alla disuguaglianza (21) che si deduce da questo procedimento, perciò la dimostrazione sussiste anche per $\gamma\rightarrow\infty$.

Si moltiplichi ora la (16) scalarmente per v_1 e si integri su tutto V. Riportiamo qui i seguenti risultati di GRAFFI:

1) posto

$$B = \int_V \Phi \times v_1 dV$$

è possibile ricavare due numeri N_3 ed N_4 tali da avere

$$B \leq N_3 \int_V v_1 \, dV + N_4 \int_V \rho_1^2 dV; \tag{22}$$

2) servendosi anche della (13) è possibile ricavare altri due numeri N_5 ed N_6 tali che

$$\begin{aligned} -\int_V f'(\rho + \rho_1) \operatorname{grad} \rho_1 \times v_1 dV \leq - \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{f'(\rho+\rho_1)\rho_1^2}{\rho+\rho_1} dV + N_5 \int_V v_1^2 dV + N_6 \int_V \rho_1^2 dV, \end{aligned} \tag{23}$$

Detto poi $2N_7$ l' estremo superiore di $|\operatorname{rot}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1)|$ in tutto $\mathcal{C}$ si avrà

$$\int_V \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1) \wedge \boldsymbol{H}_1 \times v_1 dV \leq 2N_7 \int_V H_1 v_1 dV \leq N_7 \int_V (H_1^2 + v_1^2) dV. \tag{24}$$

Da (22), (23) e (24), ricordando anche il significato di $A(t)$ introdotto nella (20), si conclude che l' operazione descritta eseguita sulla (16) dà luogo alla disuguaglianza

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho v_1^2 dV \leq -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{f'(\rho+\rho_1)\rho_1^2}{\rho+\rho_1} dV + (N_3 + N_5 + \mu N_7) \int_V v_1^2 dV + \\ + (N_4 + N_6) \int_V \rho_1^2 dV + \mu N_7 \int_V H_1^2 dV + \mu A(t). \end{aligned} \tag{25}$$

Sommando ora la (21), moltiplicata per μ, con la (25) e indicando con K il maggiore dei numeri

$$N_3 + N_5 + \mu N_7, \qquad N_4 + N_6, \qquad N_1 + N_2 + N_7,$$

si ottiene

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\mu H_1^2 + \rho v_1^2 + \frac{f'(\rho+\rho_1)}{\rho+\rho_1}\rho_1^2\right) dV \leq K \int_V (\mu H_1^2 + v_1^2 + \rho_1^2) dV.$$

Integriamo ora tale disuguaglianza rispetto a t fra 0 e t e teniamo conto delle condizioni iniziali; si ha

$$\frac{1}{2}\int_V \left(\mu H_1^2 + \rho v_1^2 + \frac{f'(\rho+\rho_1)}{\rho+\rho_1}\rho_1^2\right) dV \leq K \int_0^t dt \int_V (\mu H_1^2 + v_1^2 + \rho_1^2) dV.$$

Ricordiamo ora la (11) e, seguendo il GRAFFI, notiamo che $\frac{f'(\rho+\rho_1)}{\rho+\rho_1}$ è funzione continua positiva in tutto $\mathfrak{C}$; indichiamo allora con l il suo estremo inferiore in $\mathfrak{C}$: si ottiene

$$\frac{1}{2}\int_V(\mu H_1^2+mv_1^2+l\rho_1^2)dV\leq K\int_0^t dt\int_V(\mu H_1^2+v_1^2+\rho_1^2)dV.$$

Detto ora q il minore fra i numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{m}{2}$, $\frac{l}{2}$ e indicato con Q il rapporto $\frac{K}{q}$, si conclude con la disuguaglianza

$$\int_V(\mu H_1^2+v_1^2+\rho_1^2)dV\leq Q\int_0^t dt\int_V(\mu H_1^2+v_1^2+\rho_1^2)dV$$

da cui è facile ricavare che per ogni $0\leq t\leq T$ è

$$\int_V(\mu H_1^2+v_1^2+\rho_1^2)+dV=0$$

è perciò $H_1=0$, $v_1=0$, $\rho_1=0$ in tutto $\mathfrak{C}$.

5. **Enunciato del teorema II.** — Qualora si voglia tenere conto anche del termine $\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$, si può eliminare i e p fra le (1), (3), (5) e (7), ottenendo in sostituzione di esse le equazioni

$$\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\gamma(\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}) \tag{26}$$

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}+\mu\gamma\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}+\mu^2\gamma(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H})\wedge\boldsymbol{H}-f'(\rho)\operatorname{grad}\rho+\boldsymbol{F}+ \\ +\operatorname{grad}\beta. \tag{27}$$

Dimostreremo che le (26), (27), (2), (4) e (6) hanno un'unica soluzione sotto le ipotesi elencate al n. 3 così modificate:

Ipotesi di regolarità. - Si ammetterà anche la continuità di $\boldsymbol{E}$ e delle sue derivate prime; le sole derivate seconde supposte continue — e solo nel caso di fluidi viscosi — sono quelli di $\boldsymbol{v}$ relative alle coordinate.

Condizioni iniziali. - Siano noti per $t=0$ anche i valori di $\boldsymbol{E}$ in tutto $\mathfrak{D}$.

Condizioni al contorno. - Se $\mathfrak{D}$ è finito, la componente tangenziale di $\boldsymbol{H}$ può essere sostituita da quella di $\boldsymbol{E}$; per i fluidi viscosi, dove $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}<0$ basta sia assegnato solo ρ (e non anche la componente normale di $\boldsymbol{H}$); se $\mathfrak{D}$ è infinito basterà supporre che anche la differenza fra $\boldsymbol{E}$ e il suo valore all' infinito risulti infinitesima di ordine numerico maggiore di $\frac{3}{2}$: nessuna ipotesi è necessaria invece su rot $\boldsymbol{H}$.

6. Dimostrazione del teorema II. — Supponiamo al solito che esistano due soluzioni del problema proposto e indichiamo con $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{v}_1$ e ρ_1 le loro differenze. Fra di esse valgono le equazioni

$$\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}_1}{\partial t} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_1 - \gamma \boldsymbol{E}_1 - \gamma\mu[\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1)] \tag{28}$$

$$\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}_1}{\partial t} = - \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_1 \tag{29}$$

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \boldsymbol{v}_1 = \Phi + \Psi - f'(\rho + \rho_1) \operatorname{grad} \rho_1 ; \tag{30}$$

nell' ultima equazione si è aggiunto ai due membri il termine $\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t}\boldsymbol{v}_1$, Φ ha il significato datogli dalla (15), mentre si è posto

$$\begin{aligned}\Psi = \mu\gamma[\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{E}_1 \wedge (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1)] + \mu^2\gamma \{ [\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1)] \wedge (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1) + \\ + [\boldsymbol{v} \wedge (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1)] \wedge \boldsymbol{H}_1 + (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}_1) \wedge \boldsymbol{H} \}.\end{aligned}$$

Valgono inoltre le (13) e (14), mentre per $t = 0$ è $\boldsymbol{E}_1 \equiv \boldsymbol{H}_1 \equiv \boldsymbol{v}_1 \equiv 0$; su σ è $\boldsymbol{H}_1 \wedge \boldsymbol{n} = 0$ (oppure $\boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{n} = 0$) e, per fluidi viscosi, è $\boldsymbol{v}_1 \equiv 0$ e nei punti in cui $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}$ è minore di zero si ha $\rho_1 \equiv 0$ (per fluidi non viscosi è invece soltanto $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{n} \equiv 0$).

Come si è fatto in (L), si sommi la (28) moltiplicata scalarmente per $\boldsymbol{E}_1$ con la (29) moltiplicata scalarmente per $\boldsymbol{H}_1$ ottenendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\varepsilon \frac{\partial E_1{}^2}{\partial t} + \mu \frac{\partial H_1{}^2}{\partial t}\right) = \\ = \operatorname{div}(\boldsymbol{H}_1 \wedge \boldsymbol{E}_1) - \gamma E_1{}^2 - \gamma\mu[\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1)] \times \boldsymbol{E}_1 ;\end{aligned} \tag{31}$$

integrando la (31) su V, applicando ai termini del secondo membro le maggiorazioni al riguardo già introdotte in (L), integriamo ancora rispetto al tempo fra 0 e t e ricordando i valori iniziali si giunge alla relazione

$$\int_V (\varepsilon E_1{}^2 + \mu H_1{}^2) dV \leq R_1 \int_0^t dt \int_V (\varepsilon E_1{}^2 + \mu H_1{}^2 + v_1{}^2) dV, \tag{32}$$

dove R_1 è un numero opportunamente scelto.

La (30) invece va moltiplicata scalarmente per $\boldsymbol{v}_1$ e del pari integrata su tutto V. Si ricordi ora la (22) e la (23) e si tenga presente che in (L) si è ricavato che

$$\int_V \Psi \times v_1 dV \leq R_2 \int_V (\mu H_1^2 + \varepsilon E_1^2 + v_1^2) dV,$$

dove R_2 è un numero opportunamente scelto: si conclude con la relazione

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho v_1^2 dV \leq -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{f'(\rho+\rho_1)}{\rho+\rho_1}\rho_1^2 dV + (N_3 + N_5)\int_V v_1^2 dV + \tag{33}$$

$$+ (N_4 + N_6)\int_V \rho_1^2 dV + R_2 \int_V (\mu H_1^2 + \varepsilon E_1^2 + v_1^2) dV.$$

Integrando fra 0 e t, facendo passaggi già visti al n. 4 e scegliendo opportunamente il numero Q, si ricava

$$\int_V (v_1^2 + \rho_1^2) dV \leq Q \int_0^t dt \int_V (\mu H_1^2 + \varepsilon E_1^2 + v_1^2 + \rho_1^2) dV. \tag{34}$$

Se infine si sommano membro a membro le (32) e (34) e si procede in modo analogo a quanto si è fatto nella dimostrazione del primo teorema, risulta

$$E_1 \equiv 0, \qquad H_1 \equiv 0, \qquad v_1 \equiv 0, \qquad \rho_1 \equiv 0$$