
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROBERTO CONTI

**Determinazione esplicita, in funzione dei
dati, del nucleo della equazione integrale
traducente un problema ai limiti.**

**Estensione ai sistemi di equazioni
differenziali di un procedimento di G.
Cimmino.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 7
(1952), n.4, p. 396–403.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_396_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_396_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente
per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per
motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare
questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Determinazione esplicita, in funzione dei dati, del nucleo della equazione integrale traducente un problema ai limiti. Estensione ai sistemi di equazioni differenziali di un procedimento di G. Cimmino.

Nota di ROBERTO CONTI (a Firenze).

Sunto. - *Come il primo periodo del n. 1.*

1. Scopo della presente Nota è quello di indicare come si possa estendere ai sistemi di k equazioni differenziali (ordinarie) lineari di ordine n la tecnica ideata da G. CIMMINO ⁽¹⁾ per la traduzione in equazione integrale dei problemi ai limiti (lineari) relativi ad una sola equazione differenziale di ordine n .

Il metodo di G. CIMMINO presenta su quello abituale basato sull'impiego della funzione di GREEN il vantaggio che il nucleo dell'equazione integrale cui si perviene dipende in maniera esplicita soltanto dai dati del problema. Precisamente tale nucleo risulta una funzione lineare dei coefficienti della data equazione ed una funzione razionale intera delle ascisse dei punti nei quali si prescrivono le condizioni accessorie del problema. Tale circostanza è evidentemente di grande utilità in molte ricerche, quali ad es. quelle relative all'esistenza di autovalori ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Ved.: G. CIMMINO, *Sui problemi ai limiti per le equazioni differenziali lineari*, « Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna (10) 6 (1948-49) pp. 205-225.

⁽²⁾ Equazioni integrali con nucleo dipendente esplicitamente dai dati del problema ai limiti furono considerate anche da altri AA. Si cfr. ad

La parte centrale del lavoro di G. CIMMINO è dedicata alla trattazione del problema ai limiti consistente nel prescrivere alla funzione incognita $v(t)$ dell'equazione differenziale data, assegnati valori $a_1, a_2, \dots, a_n$ in n punti $t_1, t_2, \dots, t_n$ due a due distinti.

Per analogia e per ragioni di semplicità, in questa Nota trattiamo il problema consistente nel ricercare la soluzione $v_1(t), v_2(t), \dots, v_k(t)$ del dato sistema differenziale che assume i valori $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}; a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ rispettivamente in k gruppi di punti $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}; t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}; t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{kn}$ supposti tutti distinti quelli di un medesimo gruppo, ma non necessariamente distinti punti che appartengono a gruppi diversi.

Giungeremo alla traduzione in equazione integrale del tipo di G. CIMMINO applicando le più elementari proprietà del calcolo di matrici.

2. Siano date $n+1$ matrici quadrate di ordine k , funzioni (reali, come tutte quelle considerate qui) della variabile reale t :

$$P_i = P_i(t) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

definite in un certo intervallo (a, b) , eventualmente illimitato; in (a, b) la matrice $P_i(t)$ ammetta almeno la derivata $n-i$ -ma continua.

Sia poi $u = u(t)$ un vettore a k componenti funzione della stessa t in (a, b) , ivi dotato di derivata n -ma continua e si consideri il vettore

$$(1) \quad L_n(u) = P_0 \frac{d^n u}{dt^n} + P_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + P_{n-1} \frac{du}{dt} + P_n u.$$

Detto $v = v(t)$ un secondo vettore a k componenti, come $u(t)$ funzione di t in (a, b) con derivata n -ma continua e indicata con $\bar{P}_i = \bar{P}_i(t)$ la matrice trasposta della P_i , il vettore

$$(2) \quad M_n(v) = (-1)^n \frac{d^n \bar{P}_0 v}{dt^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} \bar{P}_1 v}{dt^{n-1}} + \dots + \frac{d \bar{P}_{n-1} v}{dt} + \bar{P}_n v$$

si dirà l'aggiunto di $L_n(u)$.

Si verifica allora facilmente (ricordando che si ha $a \times Ab = b \times \bar{A}a$ con a e b vettori qualsiasi ed A matrice qualsiasi, $\bar{A}$

gine 164-183; b) *Sugli autovalori per le equazioni differenziali lineari del terzo ordine e sopra due classi di equazioni del terzo ordine le quali ammettono infiniti autovalori tutti reali*, ibid. 3 (1932), pp. 128-140; L. BERRETTA, *Sugli autovalori per le equazioni differenziali lineari omogenee del quarto ordine*, ibid. 8 (1937), pp. 47-82.

e si ha inoltre

$$\frac{d^n u^{(ij)}}{dt^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$(8) \quad L_n(u^{(ij)}) = \sum_r^n P_r \frac{d^{n-r} u^{(ij)}}{dt^{n-r}} = \sum_r^n \frac{(t - t_{ij})^{r-1}}{(r-1)!} P_r(t) \omega^{(ij)}.$$

Se sostituiamo nella (4) il vettore (5) al posto di u , tenendo conto delle (6), (7), (8) si ha

$$(9) \quad \int_t^{t_{ij}} \left\{ v(\tau) \times \sum_1^n \frac{(\tau - t_{ij})^{r-1}}{(r-1)!} P_r(\tau) \omega^{(ij)} - \frac{(\tau - t_{ij})^{n-1}}{(n-1)!} \omega^{(ij)} \times M_n(v(\tau)) \right\} d\tau = \\ = - \sum_1^{n-1} \frac{(t - t_{ij})^s}{s!} \omega^{(ij)} \times M_s(v(t)) + \left[\omega^{(ij)} \times \bar{P}_0(t) v(t) \right]_t^{t_{ij}}.$$

Detto $l_{ij}(t)$ il polinomio di grado $n-1$ che assume il valore uno per $t = t_{ij}$ ed il valore zero negli altri punti $t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{i-1j}, t_{i+1j}, \dots, t_{nj}$ del gruppo j mo, ossia ⁽⁴⁾

$$(10) \quad l_{ij}(t) = \frac{(t - t_{1j})(t - t_{2j}) \dots (t - t_{i-1j})(t - t_{i+1j}) \dots (t - t_{nj})}{(t_{ij} - t_{1j})(t_{ij} - t_{2j}) \dots (t_{ij} - t_{i-1j})(t_{ij} - t_{i+1j}) \dots (t_{ij} - t_{nj})},$$

moltiplichiamo per $l_{ij}(t)$ ambo i membri di ciascuna (9) e per ogni j sommiamo rispetto ad i da 1 ad n ; avendo presenti le identità

$$(11) \quad \sum_1^n l_{ij}(t) (t - t_{ij})^s = 0 \quad , \quad s = 1, 2, \dots, n-1$$

otteniamo

$$(12) \quad \sum_1^n l_{ij}(t) \int_t^{t_{ij}} \left\{ v(\tau) \times \sum_1^n \frac{(\tau - t_{ij})^{r-1}}{(r-1)!} P_r(\tau) \omega^{(ij)} - \frac{(\tau - t_{ij})^{n-1}}{(n-1)!} \omega^{(ij)} \times M_n(v(\tau)) \right\} d\tau = \\ = \sum_1^n l_{ij}(t) \left[\omega^{(ij)} \times \bar{P}_0(t) v(t) \right]_t^{t_{ij}} \quad , \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

Perciò:

se $v(t)$ è una soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari di ordine n

$$(A) \quad M_n(v) = g(t)$$

⁽⁴⁾ Cfr. ad es.: G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, 2^a ed. (Bologna, 1946), p. 291.

(dove $g = g(t)$ è un vettore continuo in (a, b) , assegnato), essa deve soddisfare anche il sistema di equazioni integrali lineari

$$(B) \quad \sum_1^n l_{ij}(t) \omega^{(ij)} \times \bar{P}_0(t) v(t) = \sum_1^n l_{ij}(t) \omega^{(ij)} \times \bar{P}_0(t_{ij}) v(t_{ij}) + \\ + \sum_1^n l_{ij}(t) \int_t^{t_{ij}} \left\{ \frac{(\tau - t_{ij})^{n-1}}{(n-1)!} \omega^{(ij)} \times g(\tau) \right\} d\tau - \\ - \sum_1^n l_{ij}(t) \int_t^{t_{ij}} \left\{ v(\tau) \times \sum_1^n \frac{(\tau - t_{ij})^{r-1}}{(r-1)!} P_r(\tau) \omega^{(ij)} \right\} d\tau.$$

3. Viceversa :

se $v(t)$ è un vettore (con derivata n -ma continua ⁽⁵⁾) soddisfacente (B) esso è anche soluzione di (A).

Infatti si può scrivere

$$\sum_1^n l_{ij}(t) \left[\omega^{(ij)} \times \bar{P}_0(t) v(t) \right]_t^{t_{ij}} = \sum_1^n l_{ij}(t) \int_t^{t_{ij}} \left\{ \sum_1^{n-1} \frac{(\tau - t_{ij})^{r-1}}{(r-1)!} \omega^{(ij)} \times \bar{P}_r(\tau) v(\tau) + \right. \\ \left. + \frac{(\tau - t_{ij})^{n-1}}{(n-1)!} \omega^{(ij)} \times \left[\bar{P}_n(\tau) v(\tau) - g(\tau) \right] \right\} d\tau,$$

e con una integrazione per parti

$$\sum_1^n l_{ij}(t) \left[\omega^{(ij)} \times \bar{P}_0(t) v(t) \right]_t^{t_{ij}} = \sum_1^n l_{ij}(t) \left[\sum_1^{n-1} \frac{(t - t_{ij})^r}{r!} \omega^{(ij)} \times \bar{P}_r(t) v(t) \right]_t^{t_{ij}} - \\ - \sum_1^n l_{ij}(t) \int_t^{t_{ij}} \left\{ \sum_1^{n-1} \frac{(\tau - t_{ij})^r}{r!} \omega^{(ij)} \times \frac{d\bar{P}_r(\tau) v(\tau)}{d\tau} \right\} d\tau + \\ + \sum_1^n l_{ij}(t) \int_t^{t_{ij}} \left\{ \frac{(\tau - t_{ij})^{n-1}}{(n-1)!} \omega^{(ij)} \times \left[\bar{P}_n(\tau) v(\tau) - g(\tau) \right] \right\} d\tau.$$

Ma la prima Σ del 2° membro è nulla in virtù delle (11) cosicchè può scriversi

$$\sum_1^n l_{ij}(t) \left[\omega^{(ij)} \times \bar{P}_0(t) v(t) \right]_t^{t_{ij}} = - \sum_1^n l_{ij}(t) \int_t^{t_{ij}} \sum_1^{n-2} \frac{(\tau - t_{ij})^r}{r!} \omega^{(ij)} \times$$

⁽⁵⁾ Questa circostanza si verifica se $g(t)$ ammette derivate fino all'ordine $n-1$.

$$\times \frac{d\bar{P}_r(\tau)v(\tau)}{d\tau} d\tau + \sum_1^n l_{ij}(t) \int_t^{t_{ij}} \frac{(\tau - t_{ij})^{n-1}}{(n-1)!} \omega^{(ij)} \times \left[-\frac{d\bar{P}_{n-1}(\tau)v(\tau)}{d\tau} + \right. \\ \left. + \bar{P}_n(\tau)v(\tau) - g(\tau) \right] d\tau.$$

Al primo termine possiamo ancora applicare una integrazione per parti e così via per $n-1$ volte in tutto; infine avremo

$$\sum_1^n l_{ij}(t) \int_t^{t_{ij}} \frac{(\tau - t_{ij})^{n-1}}{(n-1)!} \omega^{(ij)} \times [M_n(v(\tau)) - g(\tau)] d\tau = 0$$

e quindi per la arbitrarietà di t e la continuità delle funzioni integrande

$$M_n(v(t)) - g(t) = 0, \quad t \text{ in } (a, b),$$

cioè vale (A).

4. Consideriamo per il sistema (A) il problema ai limiti di cui al n. 1, consistente nel prescrivere alla componente $v_j(t)$ di $v(t)$ n valori assegnati a_{1j} , a_{2j} , ..., a_{nj} nei punti t_{1j} , t_{2j} , ..., t_{nj} rispettivamente:

$$(C) \quad v_j(t_{1j}) = a_{1j}, \quad v_j(t_{2j}) = a_{2j}, \dots, \quad v_j(t_{nj}) = a_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Affinchè il sistema (B) traduca il problema (A), (C) occorrerà determinare in modo conveniente i vettori $\omega^{(ij)}$ fin qui arbitrari.

Se indichiamo con $\pi_{j1}^0(t)$, $\pi_{j2}^0(t)$, ..., $\pi_{jk}^0(t)$ rispettivamente i complementi algebrici degli elementi $p_{j1}^0(t)$, $p_{j2}^0(t)$, ..., $p_{jk}^0(t)$ di $P_0(t)$ basterà supporre

$$(13) \quad \omega^{(ij)} = \begin{pmatrix} \pi_{j1}^0(t_{ij}) \\ \pi_{j2}^0(t_{ij}) \\ \vdots \\ \pi_{jk}^0(t_{ij}) \end{pmatrix}$$

ed avremo allora per i noti teoremi di LAPLACE

$$\omega^{(ij)} \times \bar{P}_0(t_{ij})v(t_{ij}) = v(t_{ij}) \times P_0(t_{ij})\omega^{(ij)} = \det P_0(t_{ij})v_j(t_{ij}) = \det P_0(t_{ij})a_{ij}$$

cosicchè il 1° termine di (B) si può scrivere

$$(14) \quad a_j(t) = \sum_1^n l_{ij}(t) \det P_0(t_{ij})a_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

essendo $a_j(t)$ il polinomio di grado $n-1$ che nei punti t_{1j} , t_{2j} , ..., t_{nj} prende i valori, $\det P_0(t_{1j})a_{1j}$, $\det P_0(t_{2j})a_{2j}$, ..., $\det P_0(t_{nj})a_{nj}$ nell'ordine. Dunque:

e la (B') si scrive in definitiva

$$P_0(t)\Pi(t)e^{(j)} \times v(t) = a_j(t) + \gamma_j(t) + \\ + \sum_1^n \int_{t_{ij}}^t \left\{ l_{ij}(t) \sum_1^n \frac{(\tau - t_{ij})^{r-1}}{(r-1)!} P_r(\tau) \omega^{(ij)} \times v(\tau) \right\} d\tau.$$

Terminiamo osservando che se $P_0(t)$ si riduce alla matrice unità (di ordine k) lo stesso è della $\Pi(t)$ ed il primo membro di (B') si riduce alla componente $v_j(t)$ di $v(t)$; inoltre si ha $\omega^{(1j)} = \omega^{(2j)} = \dots = \omega^{(nj)} = e^{(j)}$ e il nucleo di (B') risulta pertanto un polinomio nelle $t_{..}$.