BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DIONISIO GALLARATI

Intorno ad una superficie del sesto ordine avente 63 nodi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.4, p. 392–396.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_392_0>

Intorno ad una superficie del sesto ordine avente 63 nodi.

Nota di Dionisio Gallarati (a Genova).

Sunto. - *Si considera una* F^6 *dello spazio ordinario che possiede 63 nodi e si studia la configurazione di tali punti.*

1. Il numero massimo di nodi che fino ad ora si sia riusciti ad imporre ad una superficie del sesto ordine F^6, che appartenga allo spazio ordinario ed abbia soltanto punti doppi isolati, è 63. Il risultato devesi a B. Segre (1) il quale ha anche dimostrato una proposizione generale da cui discende che una F^6 dello spazio ordinario, che soddisfi a certe ipotesi di generalità, non può possedere più di 63 nodi.

La lettura della Nota di B. Segre mi ha condotto, sfruttando un'idea ivi contenuta, a costruire una F^6 con 63 nodi come contornò apparente di una particolare forma del quarto ordine di S_4 da un suo punto doppio su di un S_3 (2). Mette forse conto di tornare su questa F^6, per aggiungere alcune considerazioni sulla con-

(1) B. Segre, *Sul massimo numero di nodi delle superficie algebriche*, Volume in onore di G. Loria, Genova 1952,

figurazione dei 63 nodi; ciò faccio qui, ricordando anzitutto il procedimento con cui la superficie in questione si ottiene.

Siano x_0 x_1, x_2, x_3, x_4 coordinate proiettive omogenee di punto in S_4 e sia T il relativo pentaedro fondamentale. Se

$$\varphi(x_0, x_1, \dots, x_4) = 0$$

è una V_3^2 non specializzata tangente alle cinque facce di T in punti generici, la V_3^4 di equazione

$$\varphi(x_0^2, x_1^2, \dots, x_4^2) = 0$$

possiede 40 nodi isolati. Si vede facilmente che, in generale, il cono Γ_3^2 tangente a V_3^4 in ciascuno di tali punti è un cono di prima specie e non contiene alcuno degli altri 39 punti doppi di V_3^4. La V_3^4 possiede 960 rette, di cui ne passano 24 per ognuno dei 40 nodi, sicchè il contorno apparente di V_3^4 su uno spazio S_3 da uno qualunque dei suoi 40 nodi è una F^6 dotata di $24 + 39 = 63$ punti doppi, tutti isolati. Di questi 63 nodi, 24 costituiscono la completa intersezione di una quadrica con una F^3 ed una F^4 di S_3.

2. Una V_3^2 di S_4 non specializzata, tangente alle 5 facce di T ha equazione:

$$\varphi = \begin{vmatrix} 0 & x_i \\ x_j & A \end{vmatrix} = 0 \qquad (i, j = 0, 1, \dots, 4),$$

con $A = \| a_{ij} \|$ matrice quadrata simmetrica non degenere del 5° ordine, avente nulli tutti gli elementi della diagonale principale ($a_{ii} = 0$). I cinque punti in cui V_3^2 tocca le facce di T hanno coordinate $(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$. Pertanto (3) i 40 nodi della V_3^4 di equazione:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & x_i^2 \\ x_j^2 & A \end{vmatrix} = 0$$

sono:

$$P_{ih}(\pm \sqrt{a_{i0}}, \quad \pm \sqrt{a_{i1}}, \quad \pm \sqrt{a_{i2}}, \quad \pm \sqrt{a_{i3}}, \quad \pm \sqrt{a_{i4}})$$

($i = 0, 1, \dots, 4$; $h = 0, 1, \dots, 7$). Essi appartengono ad 8 ad 8 alle cinque facce di T (e ciascuno ad una sola di tali facce) e gli otto punti $P_{ih}(h = 0, 1, \dots, 7)$ che appartengono alla medesima faccia di $T(x_i = 0)$ appartengono a 4 a 4 a 12 piani, costituendo una configurazione proiettivamente identica a quella degli otto vertici di un cubo: ognuno degli 8 punti appartiene così a 6 di quei piani.

Consideriamo ora cinque dei 40 punti P_{ih}, scelti uno per ogni

(3) Cfr. i lavori citati in (1), (2)

faccia di T; il determinante delle loro coordinate è:

$$\begin{vmatrix} 0 & \pm\sqrt{a_{01}} & \pm\sqrt{a_{02}} & \pm\sqrt{a_{03}} & \pm\sqrt{a_{04}} \\ \pm\sqrt{a_{10}} & 0 & \pm\sqrt{a_{12}} & \pm\sqrt{a_{13}} & \pm\sqrt{a_{14}} \\ \pm\sqrt{a_{20}} & \pm\sqrt{a_{21}} & 0 & \pm\sqrt{a_{23}} & \pm\sqrt{a_{24}} \\ \pm\sqrt{a_{30}} & \pm\sqrt{a_{31}} & \pm\sqrt{a_{32}} & 0 & \pm\sqrt{a_{34}} \\ \pm\sqrt{a_{40}} & \pm\sqrt{a_{41}} & \pm\sqrt{a_{42}} & \pm\sqrt{a_{43}} & 0 \end{vmatrix}.$$

Fissato uno degli otto punti P_{0h}, ossia fatta una scelta dei segni negli elementi della prima riga, si vede subito che ci sono $8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$ diverse scelte dei segni degli elementi rimanenti che rendano il precedente determinante *emisimmetrico* e quindi nullo. Pertanto, fissato un punto in una delle facce di T è possibile in 64 modi diversi scegliere quattro punti P_{ih} uno per ciascuna delle altre quattro facce di T, in guisa da formare con quel punto quintuple appartenenti ad un iperpiano. Di tali iperpiani ne esistono $8 \cdot 64 = 512$. Quindi i 40 punti doppi di V_3^4 si distribuiscono ad 8 ad 8 nelle cinque facce di T ed a cinque a cinque, del tipo $(P_{0h_0}, P_{1h_1}, P_{2h_2}, P_{3h_3}, P_{4h_4})$, in 512 iperpiani.

Consideriamo infine la superficie F^6 contorno apparente su uno spazio S_3^* della V_3^4 da uno dei suoi 40 nodi, per fissare le idee da $P_{00}(0, +\sqrt{a_{01}}, +\sqrt{a_{02}}, +\sqrt{a_{03}}, +\sqrt{a_{04}})$: oltre i 24 nodi che F^6 deve possedere in quanto contorno apparente su un S_3^* di una V_3^4 da un suo punto doppio (tracce sull'S_3^* delle 24 rette di V_3^4 uscenti da P_{00}) si hanno 7 nodi complanari appartenenti alla traccia sull'S_3^* dell'iperpiano $x_0 = 0$. Tali punti sono, come si vede senza difficoltà, i quattro vertici ed i tre punti diagonali di un quadrangolo piano completo. Gli altri 32 nodi si distribuiscono a quattro a quattro in $64 + 4 \cdot 12 = 112$ piani, ciascuno di essi appartenendo a 14 di tali piani. Ed inoltre si distribuiscono ad 8 ad 8 a formare quattro configurazioni proiettivamente identiche alla configurazione degli otto vertici di un cubo.

3. Scriveremo ora l'equazione del cono circoscritto a V_3^4 da P_{00}, in modo da ottenere una rappresentazione analitica pentaedrale della F^6, particolarmente atta a mettere in luce i 63 punti doppi.

Indichiamo con A sia la matrice $\|a_{ik}\|$ che il suo determinante, con A_{ij} il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} in A e con A, Φ_0, $\Phi_1, \dots, \Phi_4$ i complementi algebrici degli elementi della prima colonna di Φ. Risulta, come subito si controlla,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=4x_i\Phi_i\,;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=4\Phi_i-8x_i^2A_{ii}\,;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}=-8x_ix_jA_{ij}$$

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial x_i^3}=-24x_iA_{ii};\quad \frac{\partial^3\Phi}{\partial x_i^2\partial x_j}=-8x_jA_{ij}\,;\quad \frac{\partial^3\Phi}{\partial x_i\partial x_j\partial x_l}=0$$

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_i^4}=-24A_{ii};\quad \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_i^2\partial x_j^2}=-8A_{ij}\,;\quad \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_i^2\partial x_j\partial x_l}=\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_i^3\partial x_j}=\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_i\partial x_j\partial x_l\partial x_k}=0$$

(i, j, l, $k=0$, 1, 2, 3, 4; i, j, l, k diversi tra loro).

Il cono Γ_3^6 circoscritto a V_3^4 da P_{00} ha l'equazione

$$M^2-3LN=0, \tag{1}$$

ove, per abbreviare, si è posto:

$$M=\sum_0^4{}_{ijl}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x_i\partial x_j\partial x_l}\right)_{P_{00}}x_ix_jx_l=-24\sum_1^4{}_j\,x_j\sqrt{a_{0j}}\sum_0^4{}_i\,A_{ij}x_i^2$$

$$L=\sum_0^4{}_{ij}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{P_{00}}x_ix_j=4Ax_0^2-8\sum_1^4{}_{ik}A_{ik}\sqrt{a_{0i}}\sqrt{a_{0k}}\,x_ix_k$$

$$N=\sum_0^4{}_{ijlk}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_i\partial x_j\partial x_l x_k}\right)_{P_{00}}x_ix_jx_lx_k=-24\Phi.$$

La (1) diviene allora:

$$2\left(\sum_1^4 x_j\sqrt{a_{0j}}\sum_0^4{}_i\,A_{ij}x_i^2\right)^2-(Ax_0^2-2\sum_1^4{}_{ik}A_{ik}\sqrt{a_{0i}}\sqrt{a_{0k}}\,x_ix_k)\Phi=0. \tag{2}$$

Sono quindi doppie per Γ_3^6:

1) le 24 rette $M=L=\Phi=0$,

2) le 39 rette che da P_{00} proiettano gli altri punti P_{ih}; questi invero sono doppi per Γ_3^6, in quanto — oltre esser nodi di $\Phi=0$ — appartengono al cono $M=0$, come risulta dai noti teoremi di LAPLACE sui determinanti.

Si ha così una rappresentazione pentaedrale della F^6, la quale ne mette in evidenza i 63 nodi.

4. Relativamente alla F^6 con 63 nodi di B. SEGRE, si vede senza difficoltà che anch'essa possiede 32 nodi distribuiti ad 8 ad 8 a formare quattro configurazioni proiettivamente identiche alla configurazione degli otto vertici di un cubo, e che gli altri suoi 31 nodi sono legati ad un tetraedro $T(A_0, A_1, A_2, A_3)$ in guisa che:

1) un vertice, ad esempio A_0, è uno di essi;

2) ognuno dei tre spigoli A_0A_i contiene altri due di quei nodi;

3) ognuno dei tre piani $A_0A_iA_j$ contiene altri quattro di quei nodi;

4) il piano $A_1A_2A_3$ contiene gli altri dodici nodi.

Ciò lascia pensare che la F^6 di B. SEGRE e quella di cui è oggetto la Nota presente *non* siano proiettivamente identiche, in quanto le due configurazioni dei loro nodi siano fra loro proiettivamente diverse; ma non è facile provare se così è di fatto.